

古典電磁気学における磁気双極子モデルと 「隠れた運動量」に関する一考察

遠藤雅守

〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学 理学部 物理学科

E-mail: endo@tokai.ac.jp

(2011 年 9 月 22 日受付 ; 2011 年 10 月 11 日受理)

A Study of Magnetic Dipole Models in Classical Electromagnetism and “hidden momentum”

by

Masamori ENDO

Department of Physics, Tokai University,

4-1-1 KitaKaname, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan

E-mail: endo@tokai.ac.jp

(Received on Sept. 22, 2011; accepted on Oct. 11, 2011)

Abstract

A known paradox of the classical electromagnetism, the force on the magnetic dipole is discussed. If it is placed in an inhomogeneous magnetic field, It appears that the force experienced by the dipole differs depending on the models, namely, the magnetic charge model and the current loop model. Of course, it is impossible

since the magnetic field emanated by the dipoles are the same. It is explained that the time-dependent “hidden momentum” balances the superficial Lorentzian force on the current loop model and the net force is canceled out. This article shows that electromagnetic momentum and “hidden momentum” must be balanced in this problem due to the requirement of the relativistic momentum conservation theorem.

1 序論

古典電磁気学は、1865年に Maxwell が提唱した 20 の方程式を含む Maxwell 方程式を、Heaviside および Hertz が電磁ポテンシャルを取り除いた 4 つの式にまとめたことで完成した。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\text{where } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

古典電磁気学 (以下「電磁気学」) の基礎となる公理は電荷の保存と Coulomb の法則、そして特殊相対性理論である。これらが否定されていない現在においては電磁気学に違反する現象は存在しないと言える。しかし、電磁気学には古くから知られた数多くのパラドックスがあり、挑戦者たちを楽しませてくれる。中には簡単なものもあるが、難しいものは学術論文誌上での論争となったものもあり、電磁気学の奥深さを感じずにはいられない。電磁気学に多くの難しいパラドックスが存在する理由の一つは、電磁気学と特殊相対性理論が一体不可分で、特殊相対性理論が呈示する世界観が我々の常識を裏切ることが多いからと言えよう。実際、特殊相対性理論にも、有名な「双子のパラドックス」を筆頭に数多くのパラドックスがある。

電磁気学のパラドックスの中で、最も単純なものの一つが「すれ違う電荷と角運動量保存則」である。図 1 の様に同符号で同じ大きさの電荷が同じ速さで互いに逆向きに、ただしすれ違う軌道を運動している場合を考える。このとき、電荷はクーロン力の他にもう一方の (動く) 電荷が作る磁場からの磁気力を感じるが、二つの磁気力は作用線が一致しないため作用・反作用の法則が成立していない。そのため、系が閉じているにもかかわらず偶力が生じ、角運動量保存則が破られているように見える。実は、角運動量は電磁場の持つ運動量まで考えれば保存しているわけだが、この「電磁場の持つ運動量」という概念がわかりにくいので、電磁運動量は数々のパラドックス

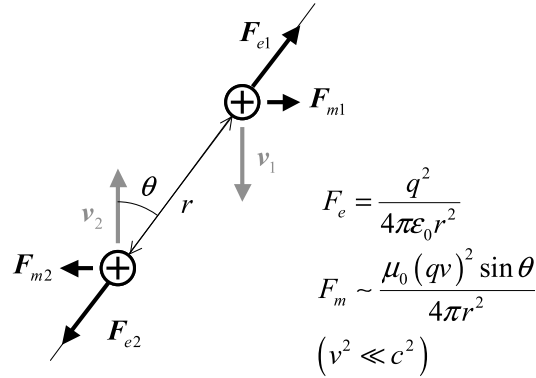


図 1: すれ違う電荷のパラドックス。系は閉じているにもかかわらず角運動量が保存しない。

を提供してくれている。本稿で取り上げるのは、かつて学術誌における論争にまでなった「磁気双極子の磁荷モデルと電流モデルで現れる違い」で、やはり電磁運動量が問題に深く関わる。

2 問題の提起

磁気双極子を表す古典モデルには、これを正負の接近した「磁荷」と見る「磁極モデル」と、極小のループ電流と見る「電流モデル」がある。原点にある磁気双極子は、磁極モデルではスカラポテンシャル

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{p}_m \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (5)$$

で表され、電流モデルではベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6)$$

で表される。ここで磁気双極子モーメント \mathbf{p}_m と磁気モーメント \mathbf{m} の関係は $\mu_0 \mathbf{m} = \mathbf{p}_m$ で、 $\hat{\mathbf{r}}$ は \mathbf{r} 方向の単位ベクトルである。極座標を採用し、磁気モーメントの向きを $\theta = 0$ の天頂方向として、微分すればどちらのモデルでも全く同一の

$$\mathbf{B} = \mu_0 \nabla \phi_m = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{m\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\boldsymbol{\theta}} + 0 \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \quad (7)$$

という双極子磁場が得られることが直ちに分かる。

従って、磁気双極子をどうモデル化するかは便宜的な問題である、と言いたいところだが、Tellegen [1] は、ある条件下ではモデルによって双極子に働く力に相違が現れることを指摘した。細野は自

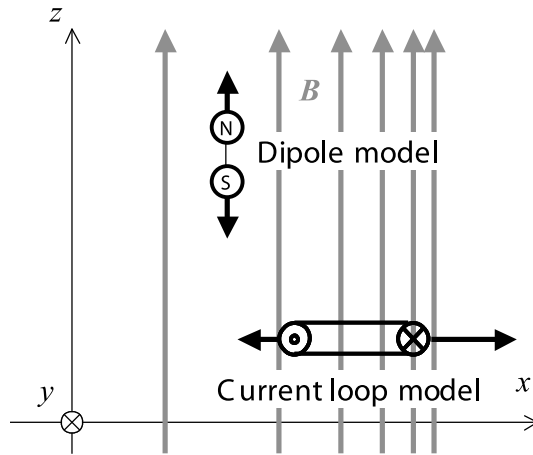


図 2: 不均一な磁場中に置かれた磁気双極子。磁極モデルは正味の力を受けないが、電流モデルは x 軸の正方向に力を受ける。

著「メタ電磁気学」[2] でこの問題を取り上げ、よりわかりやすい形で読者に呈示した。本稿では先ず細野により示されたわかりやすい問題を取り上げ、次いで一般的な場合について考える。

問題：図 2 の様に、一定の方向を向き徐々に大きさが変化する磁場中に磁気双極子を置く。磁荷モデルでは双極子が正味の力を受けないことは明らかである。一方、電流モデルは、電流ループの左右の断片が異なる大きさの磁場を感じているので、図右方向への正味の力を感じる。双極子が発する磁場はどちらのモデルでも同じであるのに、なぜこのような違いが起こるのだろうか。実は、磁極モデルと電流モデルは等価とは言えないのではないか。

歴史的経緯を述べると、Tellegen により呈示されたパラドックスは最終的に Haus と Penfield Jr. [3] により「電流モデルでも、磁極モデルと同様、双極子に正味の力は働かない」ことが示され決着を見た。つまり、間違っていたのは「力が働く」とした電流モデルの解釈であった。「磁気双極子を特徴づけるのは外部に発する磁場のみで、モデルは外部に発する磁場の発生源の解釈にすぎないから、モデルにより観測される現象が異なるはずがない」という常識的な理解がやはり正しかったわけである。一方、細野の著書でも同じ結論に達しているが、同書が「磁気双極子の磁極モデルを否定する」ことを主眼としているため、観測される力がモデルによらないことを述べる reference としては不適切な記述となっている。

本稿は、磁極モデルでも電流モデルでも、磁気双極子が外部の電磁場から受ける力は等しいこ

とを肯定的に述べることで、その過程において登場する「隠れた運動量」という概念をできるだけ平易に説明することを目的として書かれた。

3 解答

はじめに、問題をもう少し正確に、以下のように定義する。

- 系は真空で、 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ である。
- 外部磁場の磁束線は互いに並行で、 $\mathbf{B} = B_z(x)$ である。
- 双極子はモーメントが $+z$ 方向を向くように置かれる。
- $B_z(x)$ は x の一次関数で増加し、時間的には不変とする。

このように定義してもパラドックスを生じる原因についての一般性を失うことはない。すると直ちに以下の事実が指摘される。つまり「互いに並行で密度が変化する磁束線には y 方向を向いた $\nabla \times \mathbf{B}$ があり、Maxwell 方程式 (4) から $-\frac{\partial E_y}{\partial t}$ が存在する (問題の定義より実電流 \mathbf{J} は存在しない)。つまり、この系を維持するためには変化する y 方向電場が必要である」。

一般に、空間的に不均一な磁場はループ電流に対して正味の力を及ぼす (例えば「ファインマン物理学」[4])。これは、二つの平板状磁石が引き合うことから容易に想像できる現象である。しかし本稿のパラドックスは、その空間分布がどのように作られているかが隠蔽されているところに、挑戦者の誤解を引き出すポイントがある。

3.1 「隠れた運動量」

今、図 3 の様に、電流モデルによる磁気双極子を一辺 L の方形剛体チューブと考え、質量 m 、電荷量 q の荷電粒子を電流の実体と仮定する。流れる電流は一定で大きさを I としよう。磁場が x の一次関数で単調増加とすると系には $-y$ 方向、空間的に一様な電場が存在する。すると、辺 a を走る荷電粒子は外部電場により加速され、辺 c を走る荷電粒子は減速される。水平の辺では電荷は等速運動するから、電流が一定であるとき、電荷密度は図のように辺 b の方が辺 d より大きく、電荷の速度は辺 d の方が速くなくてはならない。

ここで、チューブを回る電荷の全運動量を計算する。系の対称性より左右の辺は打ち消しあうから無視できて、上下の辺のみを考えれば良い。はじめ、問題をナイーブな Newton 力学で考える。辺 b と辺 d を走る荷電粒子の数を N_b , N_d , 速度を v_b , v_d として

$$I = \frac{qN_b}{L}v_b = \frac{qN_d}{L}v_d \quad (8)$$

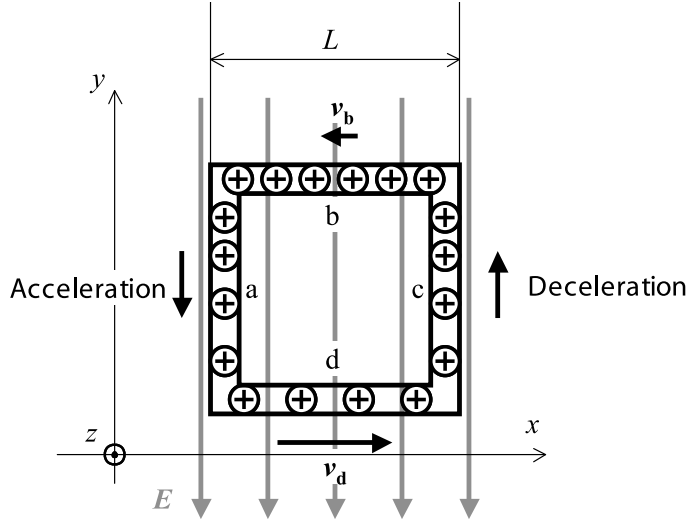


図 3: 一様な電場中に置かれた矩形電流ループと各辺における電荷の速度

が成り立つ。ここからただちに

$$N_b v_b = N_d v_d = \frac{IL}{q} \quad (9)$$

である。従って、辺 b、辺 d を走る全粒子の古典的運動量を向きまで考えて計算すると

$$\text{辺 b : } P_{\text{class}}^b = -m N_b v_b = -m \frac{IL}{q} \quad (10)$$

$$\text{辺 d : } P_{\text{class}}^d = m N_d v_d = m \frac{IL}{q} \quad (11)$$

$$(12)$$

となり、電荷の合計運動量はゼロとなる。これは、Newton 力学の要請、「質量中心が運動していなければ系の全運動量はゼロ」に合致する。

ところが、この問題を厳密に、特殊相対論で考えると問題が起こる。相対論的運動量の大きさは静止質量 m 、静止系に対する運動速度 v に係数 $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ を掛けた量で表されるから、

$$\text{辺 b : } P_{\text{rel}}^b = -\gamma_b m N_b v_b = -\gamma_b m \frac{IL}{q} \quad (13)$$

$$\text{辺 d : } P_{\text{rel}}^d = \gamma_d m N_d v_d = \gamma_d m \frac{IL}{q} \quad (14)$$

$$\gamma_b = 1/\sqrt{1 - (v_b/c)^2}, \quad \gamma_d = 1/\sqrt{1 - (v_d/c)^2}$$

古典電磁気学における磁気双極子モデルと「隠れた運動量」に関する一考察

となって打ち消し合いが破れ、正味の運動量が現れる。これはわずかな量かもしれないが、無視するわけにはいかない。そもそも、「磁場」とは特殊相対論によってはじめて現れる、電流を担う荷電粒子が周囲に及ぼす Coulomb 力なのだから。この、特殊相対論でのみ現れる正味の運動量

$$P_{\text{hid}} = m \frac{IL}{q} (\gamma_d - \gamma_b) \quad (15)$$

を「隠れた運動量」と呼ぶ。

荷電粒子の相対論的運動量と古典的運動量、そして「隠れた運動量」の関係は以下の通りである。

$$\mathbf{P}_{\text{rel}} = \sum_i m \mathbf{v}_i + \mathbf{P}_{\text{hid}} \quad (16)$$

そして、Newton 力学における運動方程式とは力と古典的運動量の時間変化の関係だから、

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m \sum_i \mathbf{a}_i = m \sum_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{rel}}}{dt} - \frac{d\mathbf{P}_{\text{hid}}}{dt} \quad (17)$$

と書かれる。電流が一定なら $\mathbf{P}_{\text{rel}} = \text{const}$ だが、電流チューブには \mathbf{P}_{hid} の時間変化に伴う正味の力

$$\mathbf{F}_{\text{hid}} = -\frac{d\mathbf{P}_{\text{hid}}}{dt} \quad (18)$$

が観測されうる。これを「隠れた力」と呼ぼう。

Haus 等は、もし外部磁場が時間変化する電場を伴うなら、双極子の「隠れた運動量」もまた時間変化し、その結果現れる「隠れた力」が Lorentz 力をちょうど打ち消す向きと大きさであることを示した。Haus 等はこれを示すため荷電粒子が光速で円形チューブを回転するモデルを呈示しているが、「隠れた運動量」と古典的運動量の区別が曖昧な上、モデルが技巧的で説明がわかりやすいとは言い難い。一方、細野も同じ問題に挑戦しており [5]、方形のチューブを仮定することで運動量の向きと大きさの変化を分離しており、論点がかなり整理されている。しかし、図 3 の系を使えば、仕事-エネルギー定理を用いて容易に「隠れた力」が Lorentz 力と釣り合うことを示せる。

電荷が電場に沿って辺 a を動くとき、電荷は電場から qEL の仕事をされる。その結果、電荷のエネルギーは

$$\Delta E = \gamma_d mc^2 - \gamma_b mc^2 \quad (19)$$

だけ増加する。 $qEL = (\gamma_d - \gamma_b)mc^2$ を使い「隠れた運動量」を

$$P_{\text{hid}} = \frac{IEL^2}{c^2} \quad (20)$$

と書き直す。一方、磁気モーメント \mathbf{m} が $IL^2\hat{\mathbf{n}}$ ($\hat{\mathbf{n}}$ は面の法線方向単位ベクトル) と表せることを利用して、

$$\mathbf{P}_{\text{hid}} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{m} \times \mathbf{E}) \quad (21)$$

と表すことができる。式 (21) を時間微分して負号をつければ電流に作用する「隠れた力」が求められるから、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{hid}} &= -\frac{d\mathbf{P}_{\text{hid}}}{dt} \\ &= -\mathbf{m} \times \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

である。

続いて、各辺が磁場から受ける Lorentz 力を計算する。電流は一定だから、対称性から辺 b および d が受ける力は相殺する。辺 a, c は異なる磁場を感じるので合計すると、

$$\begin{aligned} F_L(x) &= -ILB(x) + ILB(x+L) \\ &= \frac{\partial B}{\partial x} IL^2 \\ &= -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} IL^2 \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ここで Maxwell の方程式 (4) を使った。あとは、 $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ 、磁気モーメント \mathbf{m} が $IL^2\hat{\mathbf{n}}$ であることと、電場が $-y$ 方向であることを使えば Lorentz 力は

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{m} \times \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad (24)$$

と表され、 \mathbf{F}_{hid} にちょうど釣り合うことが示された。

3.2 電磁運動量

問題を再び y 軸の方向から見た図が図 4 である。磁気モーメント、すなわち電流 I が時間変化しないとすれば、電流ループと外部の電磁場の間に正味のエネルギー授受はない。しかし、ループ単体で見れば辺 c から辺 a への電磁エネルギーの流れが生じている。なぜなら、そう考えないと、辺 c で荷電粒子が失ったエネルギーと辺 a で荷電粒子が受け取ったエネルギーの収支が合わなくなるからである。

電磁エネルギーの授受は Poynting vector ($\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$) により表すことができる。確かに、一様な外部電場と、ループが作るリング状の磁場の外積を取れば、電流ループの辺 c (減速辺) から発して辺 a (加速辺) に吸い込まれる Poynting vector が現れる。電磁エネルギーには電磁運動量

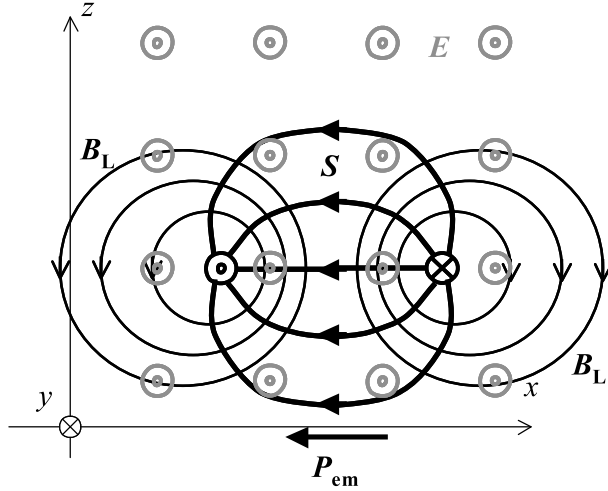


図 4: 矩形電流ループが作る磁場と外部電場によって作られる Poynting vector

密度 ($\mathbf{p}_{\text{em}} = \mathbf{S}/c^2$) が伴う [6]。電流ループに付随する電磁運動量を求めるには全空間で

$$\mathbf{P}_{\text{em}} = \frac{1}{c^2} \iiint \mathbf{S} dV = \iiint \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}_L dV \quad (25)$$

を実行すればよい。ここで \mathbf{B}_L は電流ループが発する磁場である。図 4 から明らかなように、この系では電磁運動量は図左方向を向いたの正味の値を持つ。

一方、この系にはすでに図右向きの「隠れた運動量」があり、それにも関わらず系のエネルギー中心は移動していないから、広義の運動量保存則、「エネルギー中心が観測者に対して運動していなければ観測される系の運動量の総和はゼロ」

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = \mathbf{P}_{\text{class}} + \mathbf{P}_{\text{em}} + \mathbf{P}_{\text{hid}} = 0 \quad (26)$$

(center of energy theorem)[7] より、この系では「隠れた運動量」と電磁運動量が常に釣り合いの状態であることが要請される。期待通り、磁気モーメントの電磁運動量が

$$\mathbf{P}_{\text{em}} = -\frac{1}{c^2}(\mathbf{m} \times \mathbf{E}) \quad (27)$$

と表されることは後で示す。

一般に Poynting vector は電磁波が運ぶエネルギーの表現とされているが、静電場と静磁場からなる系にも Poynting vector は存在する。たとえば充電されたコンデンサーの極板間に永久電流の流れるコイルを置くと、極板間の空間を回転する Poynting vector が現れる。これが「物

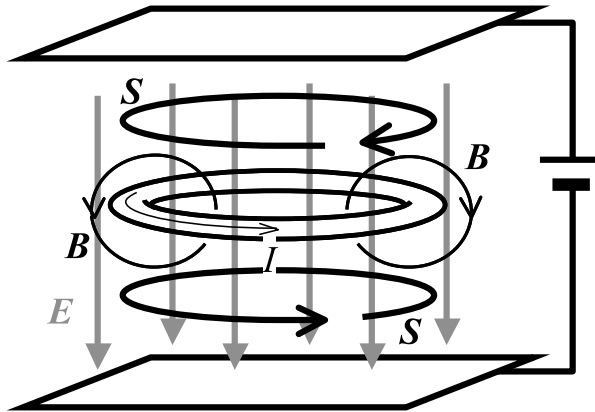


図 5: 静電場と定常電流からなる系における Poynting vector

理的実体」であるか「数学的虚構」であるかは良く議論されるが、今考えている問題から、静的電磁場において Poynting vector が作るエネルギーと運動量もまた実体であると結論せざるを得ない。

上のパラドックスで現れた、「隠れた運動量」の時間変化が電流ループに正味の外力を及ぼすという事実は俄には信じがたい。それが、このパラドックスが古典電磁気学の問題にも関わらず、20 世紀後半の学会で論争を引き起こすほどの問題として取り上げられた主な理由と思われる。21 世紀に入った現代でも「隠れた運動量」に関する論文を幾つか見ることができ [8-10]、未だにこの問題が物理学者の興味を十分に引きつける話題であることが窺える。

まとめると、「電流モデルで記述された双極子には 2 つの力が働いている。1 つは Lorentz 力でこれは全体として電流ループを図 2 右に引っ張る。そして系には増加する電場があり、これが電流ループの『隠れた運動量』を増加させる。『隠れた運動量』は相対論的運動方程式でのみ現れる量だから、差し引きすると、古典的運動方程式では電流ループはその増加分と反対方向の力を感じるようになる。結果として、『隠れた力』は Lorentz 力をちょうど打ち消し、電流ループは正味の力を感じない」となる。

系の全運動量は「隠れた運動量」 \mathbf{P}_{hid} に電磁運動量 \mathbf{P}_{em} を加味すれば $\frac{d\mathbf{P}_{\text{tot}}}{dt} = 0$ となり、系のエネルギー中心が移動しないという事実に符合するが、右向きの \mathbf{P}_{hid} 、左向きの \mathbf{P}_{em} が増加する電場とともに常に釣り合いを保ちながら増加を続ける、というのが系の描写である。

4 磁気モーメントが受ける力

続いて問題を一般化し、磁気モーメントが外部の電磁場から受ける力を磁極モデルと電流モデルで定式化して、それらについて表面的に現れる差が「隠れた運動量」の時間変化で説明できることを示す。

4.1 磁極モデルによる計算

磁極モデルで表された磁気モーメントが外部磁場から受ける力は磁気 Coulomb の法則から求められる。原点の近くに磁荷 ρ_m が分布しているとき、磁荷の集合体を受ける力は磁気 Coulomb の法則

$$\mathbf{F}_p = \iiint_V \rho_m \mathbf{H} dV \quad (28)$$

で与えられる。ここで V は磁荷の存在する有限の範囲である。磁場分布を $\mathbf{r} = 0$ のまわりで Taylor 展開すると式 (28) は、

$$\mathbf{F}_p = \iiint_V \rho_m [\mathbf{H}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla_0) \mathbf{H}(0) + \dots] dV \quad (29)$$

と変形される。 ∇_0 の表現はこれらが体積 V の積分に対しては定数であることを強調するため使った。上式第 1 項は正味磁荷をゼロ

$$Q_m = \iiint_V \rho_m dV = 0 \quad (30)$$

と仮定すれば消滅する。第 2 項を良く見ると磁気双極子モーメント

$$\mathbf{p}_m = \iiint_V \rho_m \mathbf{r} dV \quad (31)$$

が含まれているのでこれに置き換えると、磁極モデルで定義される磁気双極子が外部磁場から受ける力は

$$\mathbf{F}_p = (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (32)$$

で表されることが分かる。

4.2 電流モデルによる計算

続いて、電流モデルで表された磁気双極子が受ける力を Lorentz 力の積分から求めよう。原点付近に分布した電流が磁場から受ける Lorentz 力の合計は

$$\mathbf{F}_L = \iiint_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (33)$$

である。ここで V は電流密度が存在する有限の範囲である。同様に、磁場を原点まわりで Taylor 展開する。

$$\mathbf{F}_L = \iiint_V \mathbf{J} \times [\mathbf{B}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla_0) \mathbf{B}(0) + \dots] dV \quad (34)$$

積分を実行するにあたり、定常電流分布 \mathbf{J} についての公式を一つ導出する。任意の関数 f, g と \mathbf{J} を掛けてその発散を取る。ベクトル恒等式からこれは

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (fg\mathbf{J}) &= g\mathbf{J} \cdot \nabla f + f\mathbf{J} \cdot \nabla g + fg\nabla \cdot \mathbf{J} \\ &= g\mathbf{J} \cdot \nabla f + f\mathbf{J} \cdot \nabla g - fg \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= g\mathbf{J} \cdot \nabla f + f\mathbf{J} \cdot \nabla g \end{aligned} \quad (35)$$

と変形される。最後の項は、電流分布が定常であることから落ちた。Gauss の発散定理から、

$$\iiint_V \nabla \cdot (fg\mathbf{J}) dV = \oiint_V fg\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (36)$$

と表面積分に変換でき、積分範囲を電流の外にとればこれはゼロとなる。結局、電流分布を囲む体積 V における積分で以下の公式が成り立つ。

$$\iiint_V (g\mathbf{J} \cdot \nabla f + f\mathbf{J} \cdot \nabla g) dV = 0 \quad (37)$$

たとえば、 f として 1 を、 g として x を採用すると直ちに以下の関係が導かれる。

$$\iiint_V J_x dV = 0 \quad (38)$$

y 成分、 z 成分も同様である。従って式 (34) の第 1 項、

$$\iiint_V \mathbf{J} \times \mathbf{B}(0) dV \quad (39)$$

はゼロとなる。

第2項の積分にはちょっとした技巧を使う。 x 成分に注目しよう。積分の中身を正直に書き下すと、 x 成分は

$$J_y \left[x \frac{\partial B_z}{\partial x} + y \frac{\partial B_z}{\partial y} + z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] - J_z \left[x \frac{\partial B_y}{\partial x} + y \frac{\partial B_y}{\partial y} + z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] \quad (40)$$

となる。ここで \mathbf{B} の微分は $\mathbf{r} = 0$ の位置で実行されることに注意されたい。今度は、式 (37) において f として y を、 g として z を採用すると直ちに以下の関係が導かれる。

$$\iiint_V J_y z dV = - \iiint_V J_z y dV \quad (41)$$

つまり、有限空間にとどまる定常電流分布の成分と位置ベクトルの成分を掛けて積分したものは、それらの成分を入れ換えると、大きさが同じで符号が逆になるということが示された。式 (41) の関係を使えば、式 (40) から \mathbf{J} の成分と座標を入れ換え符号を逆にしたものを引き、2で割っても答は同じになる。具体的に書き下すと、

$$\frac{1}{2} \left\{ J_y \left[x \frac{\partial B_z}{\partial x} + y \frac{\partial B_z}{\partial y} + z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] - J_z \left[x \frac{\partial B_y}{\partial x} + y \frac{\partial B_y}{\partial y} + z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] \right. \\ \left. - y \left[J_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + J_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + J_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] + z \left[J_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + J_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + J_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] \right\} \quad (42)$$

整理してまとめよう。

$$\frac{1}{2} \left\{ (J_y x - J_x y) \frac{\partial B_z}{\partial x} + (J_y z - J_z y) \frac{\partial B_y}{\partial y} + (J_y z - J_z y) \frac{\partial B_z}{\partial z} + (J_x z - J_z x) \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} \quad (43)$$

次に、電流分布の磁気モーメントが

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} dV \quad (44)$$

で与えられることを思い出せば、式 (43) を m_x , m_y , m_z を使って以下の様に書き直せる。

$$m_z \frac{\partial B_z}{\partial x} - m_x \frac{\partial B_y}{\partial y} - m_x \frac{\partial B_z}{\partial z} + m_y \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (45)$$

式 (45) に $m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} - m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$ を加え、もう一度項別に整理すると以下の形を得る。

$$[\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})]_x - [\mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B})]_x \quad (46)$$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ であるので第2項は消え、式 (40) からここまでの変形は式 (34) の第2項の計算であつ

たことを思い出せば、電流モデルで定義される磁気双極子が外部磁場から受ける力は

$$\mathbf{F}_L = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (47)$$

で表される事が分かる。

4.3 磁極モデルと電流モデルの差

ここまでの計算で、磁極モデルで計算した力 \mathbf{F}_p と電流モデルで計算した力 \mathbf{F}_L の表式が微妙に異なることに気づく。その差はいったい何なのだろうか。ここで $\mathbf{F}_p - \mathbf{F}_L$ を計算してみよう。ベクトル恒等式を使えば簡単に、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p - \mathbf{F}_L &= (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{m}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{m} \\ &= -\mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (48)$$

である。ここで \mathbf{m} は定ベクトルという事実を使った。さらに、ここに Maxwell の方程式 (4) を代入、変形すると、

$$\mathbf{F}_p - \mathbf{F}_L = -\mathbf{m} \times \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \right) \quad (49)$$

を得る。系に電流密度 \mathbf{J} は無いのでこの項は落として良い。すると両者の受ける力の違いは

$$\mathbf{F}_p - \mathbf{F}_L = -\mathbf{m} \times \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (50)$$

である。すなわち、変化する電場があるときにのみ、見かけ上は磁気双極子の受ける力は磁極モデルと電流モデルで異なることが示された。しかし、今回のパラドックスを別にすれば、磁気双極子が磁場から受ける力を考える問題に、同時に変化する電場が存在するようなことはないので、この違いが顕わになる問題は希と言って良い。従って多くの教科書では無批判に「モデルにより双極子の受ける力が異なることはない」としているが、これは厳密には正しくない。いま示したように、系に時間的に変化する電場（または磁場の回転）があるときには明らかに \mathbf{F}_p と \mathbf{F}_L には差があることが分かる。

ところが現実はずっと複雑で、ここで現れた \mathbf{F}_p と \mathbf{F}_L の差は、式 (50) と式 (22) の比較から明らかのように、今まで考慮していなかった「隠れた力」によって相殺されるのである。結果的には、多くの教科書の記述は正しいわけだが、これは間違いを二重に見逃していた結果によるものである。磁気双極子が外部の電磁場から受ける力を正しく説明するには、「隠れた力」まで考慮しなくてはならない。

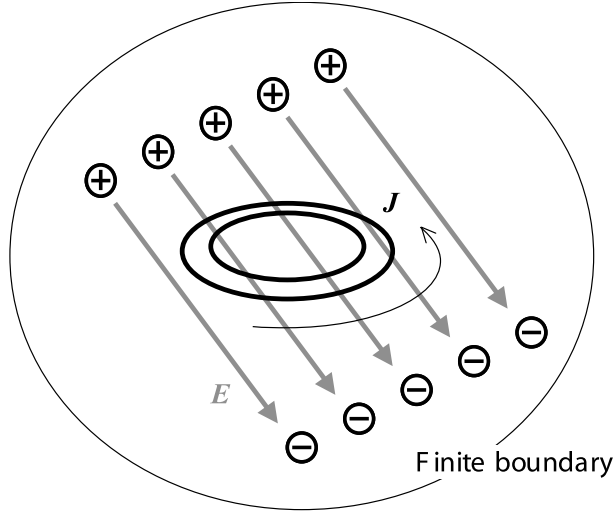


図 6: 有限の範囲に存在する電流密度と電荷

4.4 磁気モーメントが持つ電磁運動量

最後に、磁気モーメントが持つ電磁運動量が

$$\mathbf{P}_{\text{em}} = -\frac{1}{c^2}(\mathbf{m} \times \mathbf{E}) \quad (27)$$

と表せることを示そう。本稿では Vaidman により示された巧みな方法 [11] を用いる。

図 6 の様に、定常電流が有限の空間に閉じこめられており、定常電場に晒されている状況を考える。ただし、電場を生じる電荷もやはり有限の空間に存在すると考える。電場は定常だから必ず $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ を満たすポテンシャル ϕ が存在する。ここで、 $\nabla \times (\phi\mathbf{B})$ なるベクトル量を全空間で積分する。電荷、電流が有限の空間にとどまるため $|\phi\mathbf{B}|$ は r^{-3} のオーダーで、Gauss の発散定理を使い表面積分に変換すれば

$$\iiint_{\text{whole space}} \nabla \times (\phi\mathbf{B}) dV = \oiint_{r \rightarrow \infty} d\mathbf{S} \times (\phi\mathbf{B}) = 0 \quad (51)$$

と積分値が 0 となるのが分かる。

続いて、ベクトル恒等式と Maxwell の方程式 (4) を使い $\nabla \times (\phi\mathbf{B})$ を変形する。

$$\begin{aligned} \nabla \times (\phi\mathbf{B}) &= \phi\nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \nabla\phi \\ &= \phi\mu_0\mathbf{J} + \mathbf{B} \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (52)$$

全空間で積分すれば以下の関係を得る。

遠藤雅守

$$\mu_0 \iiint_{\text{whole space}} \phi \mathbf{J} dV = \iiint_{\text{whole space}} \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV \quad (53)$$

式 (25) と式 (53) を比べ、以下の表式を得る。

$$\mathbf{P}_{\text{em}} = \frac{1}{c^2} \iiint_{\text{whole space}} \phi \mathbf{J} dV \quad (54)$$

電場 \mathbf{E} (そしてポテンシャル ϕ) が電流の存在する範囲では激しく変化しないと考えれば、ポテンシャルを原点まわりで Taylor 展開して第 2 項までを考えればよい。いまや、積分範囲は電流密度の存在する空間に制限されたことに注意しよう。

$$\mathbf{P}_{\text{em}} = \frac{1}{c^2} \iiint_V \mathbf{J} [\phi(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla_0) \phi(0) + \dots] dV \quad (55)$$

第 1 項の積分は、電流が有限の範囲にとどまることからただちに 0 とわかる。第 2 項を $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ を使い書き直すと、電磁運動量を得るには

$$\mathbf{P}_{\text{em}} = -\frac{1}{c^2} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (56)$$

を求めれば良いことが分かる。成分ごとに検討しよう。式 (56) の積分の中身の x 成分を書き下すと、

$$-J_x(xE_x + yE_y + zE_z) \quad (57)$$

であるが、ここに式 (41) を適用し、式 (42) と同様の計算をしてみよう。

$$\frac{1}{2} \left\{ -J_x(xE_x + yE_y + zE_z) + x(J_x E_x + J_y E_y + J_z E_z) \right\} \quad (58)$$

項別に整理すると、

$$\frac{1}{2} \left\{ -E_z(J_x z - J_z x) + E_y(J_y x - J_x y) \right\} \quad (59)$$

式 (43) を見れば、式 (59) を積分したものは磁気モーメント \mathbf{m} で置き換えられることに気づくだろう。すなわち

$$-E_z m_y + E_y m_z = -(\mathbf{m} \times \mathbf{E})_x \quad (60)$$

である。したがって、磁気モーメントが持っている電磁運動量は

$$\mathbf{P}_{\text{em}} = -\frac{1}{c^2}(\mathbf{m} \times \mathbf{E}) \quad (27)$$

で表されることが示された。つまり、電場中に置かれた磁気双極子は式 (27) で表される電磁運動量を持ち、これは式 (21) で表される、磁気モーメントが電場中で持つ「隠れた運動量」と符号が逆で同じ大きさであり、電磁運動量と「隠れた運動量」まで考慮すれば再び運動量保存則が成立することが示された。

5 まとめ

古典電磁気学のパラドックスの中でも難解なものとして知られる「磁気双極子が受ける力のモデル依存性」について論じた。磁気双極子のモデルには、双極子を正負の磁荷と見る磁極モデルと、極小電流ループと見る電流モデルがある。双極子が発する磁場はモデルによらないため、あらゆる場合で双極子が外部磁場から受ける力は等しいはずだが、これらに働く力が異なるように見える系があることが指摘された。しかし、これは、電流モデルにおける「隠れた運動量」の時間変化から生じる力を見落としており、これを計算すると、電流モデルで表された磁気双極子に働く力は磁極モデルと同一であることを示すことができた。

今回取り上げたパラドックスも、「我々が観測できるのは双極子外部から見た磁場だけであり、それが等しいならば実体が何であれそれらは等しく振る舞う」という常識を裏切らない結論を見たわけだが、その過程であぶり出された「隠れた運動量」は「Newton 力学の運動方程式と特殊相対論の運動方程式の差が生む運動量」という奇妙な概念である。そしてそれが、この問題ではちょうど電磁運動量と大きさが同じで逆向きのベクトルであり、それゆえ相対論的運動量保存則が守られることを示した。電磁運動量は Maxwell 方程式から必然的に導かれる概念であるから、Maxwell 方程式と電磁運動量、そして運動量保存則を認めるなら「隠れた運動量」の存在もまた認めざるを得ない。

誕生以来 150 年を迎える古典電磁気学はとうの昔に完成された理論であるが、だからと言って新しいことがもう出てこないか、ということそんなことはない。ここ 10 年で飛躍の進歩を遂げた光学的 metamaterial の研究は、古典電磁気学の理論、すなわち Maxwell 方程式に立脚している。ちなみに、光学的 metamaterial により実現された「負の屈折率を持つ物質」が実在しうるのか、実際に作られるまではやはり学会を巻き込んだ大論争があったそうである。今回取り上げた問題を通じて、古典電磁気学の味わい深さを再認識して頂ければ幸甚である。

遠藤雅守

参考文献

- [1] B. D. H. Tellegen, “Magnetic-Dipole Models,” *Am. J. Phys.* **30** (1962) pp. 650-652.
- [2] 細野敏夫「メタ電磁気学」(森北出版, 1999) pp. 209-210.
- [3] H. A. Haus and P. Penfield Jr., “Force on a conducting loop,” *Physica* **42** (1969) pp. 447-454.
- [4] R. P. Feinmann *et al.*, 宮島龍興訳「フラインマン物理学 III 電磁気学」(岩波書店, 1999) pp. 183-188.
- [5] 細野敏夫, 「磁気双極子の古典モデルに働く力」, 電子情報通信学会論文誌 C-I **J77-C-I** pp. 1-11, 1994.
- [6] V. D. Barger and L. G. Olsson, 小林/土佐訳「電磁気学 II-新しい視点にたつて」(培風館, 1992) pp. 25-26.
- [7] T. H. Boyer, “Illustrations of the relativistic conservation law for the center of energy,” *Am. J. Phys.* **77** (2005) pp. 953-961.
- [8] T. H. Boyer, “Connecting linear momentum and energy for electromagnetic systems,” *Am. J. Phys.* **74** (2006) pp. 742-742.
- [9] T. H. Boyer, “Connecting “Hidden Momentum”,” *Am. J. Phys.* **76** (2008) pp. 190-191.
- [10] D. Babson, S. P. Reynolds, R. Bjorkquist, D. J. Griffiths, “Hidden momentum, field momentum, and electromagnetic impulse,” *Am. J. Phys.* **77** (2009) pp. 826-833.
- [11] L. Vaidman, “Torque and force on a magnetic dipole,” *Am. J. Phys.* **58** (1990) pp. 978-983.