力学演習　今日の One point

第 9 回講義

- 物体に働く力が，物体の原点からの距離に比例し，かつ引力である問題を考える．運動を 1 次元に限れば，物体は「単振動」を行う．

- このとき，物体に働く力を「復元力」と呼ぶ．代表的な復元力はばねの反発力である．

- 物体の質量を m, 位置を x, 復元力を$-kx$ とするとき, 運動方程式は以下の様になる.
  $$m\ddot{x} = -kx \qquad (1)$$

- 式(1)は，「2 階線形斉次微分方程式」である．正統な解法なら，式(1)を特性方程式に書き直して，根 λ_1，λ_2 を求め，$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ (C_1，C_2 は定数)とするところだが，これは「線形微分方程式の解法」を学んでからでないと無理.

- 解き方はパターンで憶える.
  (ア) $\ddot{x}$ の係数を 1 に揃える.　$\ddot{x} = -\dfrac{k}{m}x$
  (イ) x の係数を ω^2 で置き換える　$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad (2)$
  (ウ) (2)式の解は,　$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad (3)$
  (A，B は定数)で，これは一般解である.

- 三角関数の公式を使い，(3)式は以下のようにも書ける.
  $$x = C\cos(\omega t + \delta) \qquad (4)$$
  $$C = \sqrt{A^2 + B^2}\,,\quad \tan\delta = -\frac{B}{A}$$

- 問題の解き方：
  (ア) 運動方程式を立てる.
  (イ) 単振動の運動方程式(2)に変形
  (ウ) 一般解は式(3)だから，初期条件を満たすように A，B を決定する.

- 単振り子の復元力：
  軌道 s に沿った「曲線座標」を採用．$m\ddot{s} = F_s = -mg\sin\theta$
  $\sin\theta \sim \theta$ の近似を採用．$m\ddot{s} = -mg\theta = -mg\dfrac{s}{L}$
  標準形に変形し，$\ddot{x} = -\omega^2 x$，ここで $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$.