

## 無限長直線電流から遠ざかる荷電粒子が受ける力

北林照幸, 遠藤雅守

〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学理学部物理学科

E-mail: teruyuki@tokai-u.jp

(2016年9月13日受付; 2016年11月23日受理)

## Force to a charged particle exerted by an infinitely long current

by

Teruyuki KITABAYASHI<sup>\*1</sup> and Masamori ENDO

*Department of Physics, School of Science, Tokai University,  
4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka-shi, Kanagawa, 259-1292, Japan*

<sup>\*1</sup>Corresponding author: E-mail: teruyuki@tokai-u.jp

(Received on Sep. 13, 2016; accepted on Nov. 23, 2016)

### Abstract

It is well known that the magnetic field is explained by the Special Relativity. One simple explanation of this fact is made by a thought experiment, in which a charged particle moves horizontally to the infinite linear current. If the current is composed of positive and negative charges moving opposite directions each other, the external moving charge feels the different Coulomb forces from those particles due to the asymmetric Lorentzian contraction. On the other hand, if the external charged particle is vertically moving away from the current, the system is symmetric and no Lorentzian forces may result. However, in reality, this particle feels the Lorentzian force from the magnetic field, as easily calculated from the classical electromagnetism. By the exact application of the special relativity, we show that the system is no longer symmetric and a net force that exerts the charged particle appears. It is shown that the magnitude and direction of the force coincides with the result of the classical electromagnetism. The failure of the first naïve explanation is discussed.

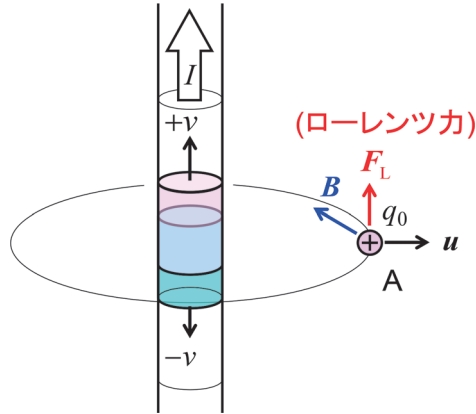


図 1: 電流に対して垂直に運動する荷電粒子が感じるローレンツ力

Keywords: Electromagnetism, Special relativity, Lorentzian force, Infinite current

## 1 背景

本稿執筆のきっかけとなったのは、著者の一人である遠藤の著書「これならわかる電磁気学」[1]の読者から寄せられた質問である。質問は、要約すると以下の様なものである。

「『これならわかる電磁気学』では、磁場の正体が電場の相対論効果であることを説明するため、無限長直線電流に対して「平行に」動く電荷のモデルを用いています。この説明は良くわかったのですが、荷電粒子が電流に対して「垂直に」遠ざかる場合は、相対論的説明はどのようなのでしょうか？」

多くの電磁気学の教科書では、「磁場」の存在を天下一りに認めているが、これが電場の相対論効果、所謂「ローレンツ収縮」の結果であることは、無限長直線電流に対して「平行に」動く電荷のモデルを使って比較的容易に説明できる。この説明は、遠藤 [2] やファインマン [3] などの教科書で見ることができる。

本論の主題は、このよく知られた荷電粒子が「平行に」動くモデルの代わりに、荷電粒子が電流に対して速度  $u$  で「垂直に」遠ざかるモデルを考えることである。この場合は、図 1 の様に、電流を担う荷電粒子の運動は、A から見て対称である。したがってローレンツ収縮も対称で、一見するとローレンツ収縮の効果は現れないように思われる。すなわち荷電粒子は正味の力を受けないはずだと思われるのである。

ところが、古典電磁気学では、この系で荷電粒子は正味の力を受ける。図 1 の系でも荷電粒子の速度  $u$  と磁場  $B$  は垂直で、 $F = q_0 u \times B$  から力の大きさは  $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} q_0 u$ 、向きは電流に平行な方向である。このように、実際の電荷は古典電磁気学で知られたローレンツ力を受けるのであるから、荷電粒子が平行に動くモデルと同様に、荷電粒子が垂直に遠ざかるモデルでも、磁場、ローレンツ力を直接用いずに、相対性理論と電場、クーロン力のみを用いてローレンツ力を説明できるはずである。

我々はこの問題を解決している文献を当たったが納得の行く説明を見つけることはできなかった。そこで、自ら計算を行い、明快な結論を得たので本稿で報告する。

## 2 特殊相対論による問題の解

我々は、図 1 の問題を特殊相対論を厳密に用いて解き、その結果が古典電磁気学から導かれる結論と一致することを見出した。その解法を以下に示す。

無限長直線電流から遠ざかる荷電粒子が受ける力

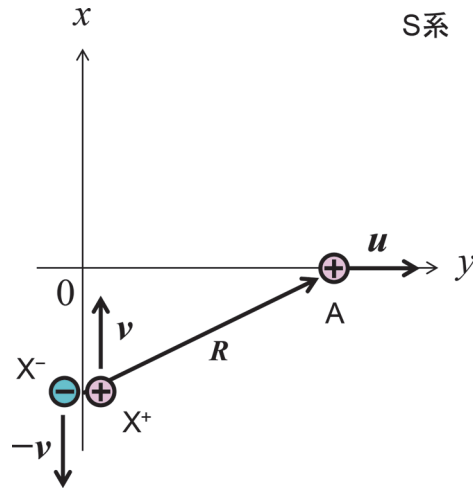


図 2: 電流の一部をなす一組の正負の電荷  $X^+$ ,  $X^-$  と, 運動する電荷 A

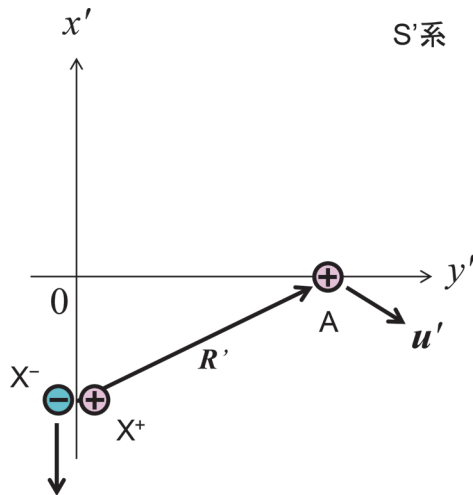


図 3:  $X^+$  と同じ速度で動く  $S'$  系

2.1 一組の荷電粒子が他の荷電粒子に及ぼす正味の力

はじめに, 図 2 の様にデカルト座標系  $S$  をとり,  $x$  軸に沿って運動する一組の正負の電荷  $X^+$  および  $X^-$  (電荷量  $q$ ) の荷電粒子が,  $y$  軸に沿って運動する荷電粒子 A (電荷量  $q_0$ ) に及ぼす力の大きさを計算する. いま考えている瞬間に  $X^+$  および  $X^-$  は  $(x, 0, 0)$  にあり, 速度はそれぞれ  $(+v, 0, 0)$  および  $(-v, 0, 0)$  とする. A は座標  $(0, y, 0)$  にあり, 速度は  $(0, u, 0)$  とする.  $X^+$ ,  $X^-$  から A に引いた変位ベクトルを  $R$  とする.

仮に  $X^+$  が A に対して静止しているなら,  $X^+$  が A に及ぼすクーロン力  $F^+$  は以下の様に書ける.

$$F_x^+ = k \frac{qq_0x}{R^3}, \quad F_y^+ = k \frac{qq_0y}{R^3} \tag{1}$$

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  はクーロン定数である.

一方, 本論で考える系では,  $X^+$  と A はどちらも動いている. この場合には, クーロン力の源となる  $X^+$  が静止している系にローレンツ変換で移って議論しなければならない.  $X^+$  と A がどちらも動いている座標系を  $S$  系,  $X^+$  と同じ速度で運動する座標系を  $S'$  系とすると, 位置と速度のローレンツ変換は

[4]

$$\mathbf{R}' = (\gamma x, y, 0), \quad \mathbf{u}' = \left(-v, \frac{u}{\gamma}, 0\right) \quad (2)$$

となる. ここで,  $X^+$  の位置を  $S'$  系の原点にとり, 時刻  $t = t' = 0$  で  $S$  系と  $S'$  系の原点が一致しているとした. また  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  はローレンツ因子である.

$S'$  系においては,  $X^+$  は静止しているから,  $X^+$  が  $A$  に及ぼすクーロン力  $\mathbf{F}^{+'}$  は以下のように書ける.

$$F_x^{+'} = k \frac{qq_0 x'}{R'^3} \quad (3)$$

$$F_y^{+'} = k \frac{qq_0 y'}{R'^3} \quad (4)$$

ここで注意すべきは,  $X^+$  が静止している座標系 ( $S'$ ) では,  $A$  が動いていても, 静止していても,  $X^+$  が  $A$  に及ぼすクーロン力は等しいということである. これは相対論の問題ではなく, 実験によって確かめられるべきことであり, 実際等しいことが広く受け入れられている.

この  $\mathbf{F}^{+'}$  をローレンツ変換で  $S$  系に写像すれば [5], 我々が見る「動く電荷が感じる力」, すなわちローレンツ力を得ることができる. 特殊相対論によれば, 力のローレンツ変換は

$$F_x^+ = \frac{F_x^{+'} + (v/c^2) (F_x^{+'} u_x' + F_y^{+'} u_y')}{1 + v u_x' / c^2} \quad (5)$$

で与えられる. 式 (5) に式 (2) を代入すれば次の式を得る.

$$F_x^+ = \gamma k \frac{qq_0}{R'^3} \left(x + \frac{vu}{c^2} y\right) \quad (6)$$

同様に  $F_y^{+'}$  も  $S$  系に写像する.

$$F_y^+ = \gamma k \frac{qq_0}{R'^3} y \quad (7)$$

同じ様にして,  $S$  系で速度  $(-v, 0, 0)$  で運動する  $X^-$  と  $A$  の間に働くローレンツ力  $\mathbf{F}^-$  を計算する. 今度は  $S'$  系の速度を  $X^-$  と同じにとる.  $X^+$  と  $X^-$  の電荷の負号が逆になることに注意すると以下の結果を得る.

$$F_x^- = -\gamma k \frac{qq_0}{R'^3} \left(x - \frac{vu}{c^2} y\right) \quad (8)$$

$$F_y^- = -\gamma k \frac{qq_0}{R'^3} y \quad (9)$$

電荷  $A$  が感じる正味の力は  $\mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-$  だが, 式 (7), 式 (9) から正味の力の  $y$  成分は打ち消し合う. ところが  $x$  成分は打ち消されずに残り, 正味の力は以下のように書かれる.

$$F_x = F_x^+ + F_x^- = 2\gamma k \frac{qq_0}{R'^3} \frac{vu}{c^2} y \quad (10)$$

## 2.2 無限長直線電流が荷電粒子に及ぼす力

式 (10) の結果を「無限長直線電流から遠ざかる荷電粒子間に働く力」に拡張するには, 図 4 の様に電荷  $X^+$ ,  $X^-$  を線電荷密度と微小長さ  $dx$  の積に置き換え,  $x$  に対して  $-\infty$  から  $+\infty$  まで積分すればよい.

電流を担う正負電荷の線電荷密度をどちらも  $\tau/2$  として,  $z$  軸と  $A$  との距離を  $r$  とする. 微小電荷  $\pm \frac{\tau}{2} dx$  が電荷  $A$  に及ぼす力  $dF_x$  は, 式 (10) より

$$dF_x = 2\gamma k \frac{\left(\frac{\tau}{2} dx\right) q_0}{R'^3} \frac{vu}{c^2} r \quad (11)$$

無限長直線電流から遠ざかる荷電粒子が受ける力

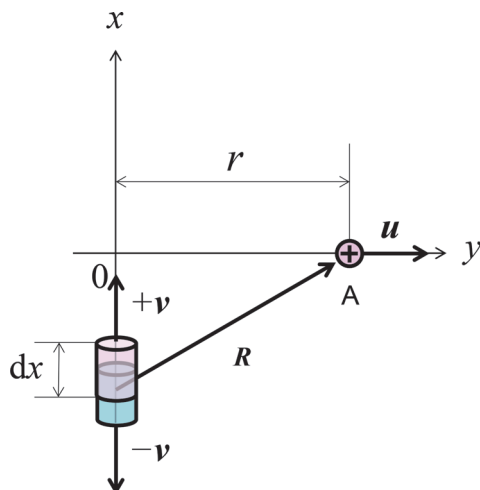


図 4: 前項の議論を無限長直線電流に拡張

となる. ここで  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $\frac{1}{c^2} = \epsilon_0\mu_0$ ,  $I = \tau v$ ,  $R' = \sqrt{\gamma^2 x^2 + r^2}$  に注意して積分すると,

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} dF_x = \gamma q_0 u \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(r^2 + \gamma^2 x^2)^{3/2}} = \gamma q_0 u \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \frac{2}{\gamma r^2} \\
 &= q_0 u \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{12}
 \end{aligned}$$

を得る. これは, ローレンツ力から導かれる結果と同じである. したがって, 図 1 に示す無限長直線電流に対して「垂直に」動く電荷のモデルでも, 動く電荷が感じる力は磁場から受けるローレンツ力と等価であることが特殊相対論で説明可能であることが示された.

### 3 なにを見誤っていたのか

前節の議論により, 特殊相対論で考えても無限長直線電流に対して「垂直に」動く電荷は正味の力を感じることを示された. それでは, 最初の考え方はどこが間違いだったのだろうか.

図 5 は, ペアの電荷が, それぞれ正味で A に対してどのような力を及ぼすかを定性的に示したものである. 2.1 節で計算したように, 特殊相対論によれば, A に対して近づく電荷は, その速度と同じ方向成分の力が強くなり, A に対して遠ざかる電荷はその速度と同じ方向成分の力が弱くなる. これは, 電荷の  $x$  軸上の位置には依存しない. したがって,  $x$  軸のプラス側 ( $x > 0$ ) にあるペアの電荷 (a) も, マイナス側 ( $x < 0$ ) にあるペアの電荷 (b) も, A に対する引力と斥力が打ち消しあうが, どちらもわずかな  $x$  の正方向成分の力が残る. これが, 静止系において「ローレンツ力」として観察される力の正体であることが明らかになった.

つまり, 間違っていた考え方は, 「原点に対して対称な位置にある,  $x > 0$  の電荷ペアから生じる正味の力と,  $x < 0$  の電荷ペアから生じる正味の力は, A に対して対称だろう」という思い込みであったことが明らかとなった.

### 4 結論

「無限長直線電流から垂直に遠ざかる荷電粒子はどちらの方向の力を受けるか」という問題を, 特殊

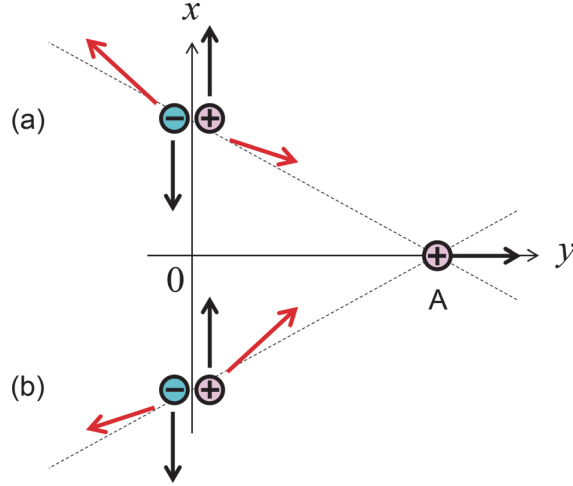


図 5: 見間違いが起こった原因を定性的に説明する図

相対論を用いて解いた。この問題は古典電磁気学的には容易に解け、ローレンツ力の向きは電流に平行であることが導かれる。しかし、電流は荷電粒子に対して対称なため、特殊相対論の「正負電荷のローレンツ収縮の違いが磁場」というナイーブな説明では、荷電粒子は電流から力を受けないことになってしまう。

この問題に対して、相対論的力学に基づく詳しい考察により、電流を担う電荷が外部の荷電粒子に対して近づく場合はクーロン力が強くなり、遠ざかる場合にはクーロン力が弱くなることを示した。そして、特殊相対論から導いた力の大きさはマクスウェル方程式から導かれる結果と一致した。

## 5 謝辞

本稿執筆のきっかけをつくってくれた大西達也氏に、この場を借りて謝意を表する。

## 6 付録

特殊相対性理論 [4][5] で登場するローレンツ変換の中で、本稿に関連の深い公式について解説する。いま、2つの座標系  $S$  と座標系  $S'$  を考える。これら2つの座標系は時刻0で原点が一致しており、 $x$  軸と  $x'$  軸、 $y$  軸と  $y'$  軸、 $z$  軸と  $z'$  軸はそれぞれ平行とする。また、 $S$  系から見て、 $S'$  系が  $x$  軸に沿って一定の速さ  $v$  で動いているとする。この時、ある事象に関する  $S$  系での座標  $(x, y, z)$ 、時間  $t$ 、速度  $(u_x, u_y, u_z)$ 、運動量  $(p_x, p_y, p_z)$ 、エネルギー  $E$ 、力  $(F_x, F_y, F_z)$  は、 $S'$  系での量と次の関係がある。

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2) \quad (13)$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y/\gamma}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z/\gamma}{1 + vu'_x/c^2} \quad (14)$$

$$p_x = \gamma(p'_x + vE'/c^2), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z \quad (15)$$

$$E = \gamma(E' + vp'_x) \quad (16)$$

$$F_x = \frac{F'_x + (v/c^2)(\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}')}{1 + vu'_x/c^2}, \quad F_y = \frac{F'_y/\gamma}{1 + vu'_x/c^2}, \quad F_z = \frac{F'_z/\gamma}{1 + vu'_x/c^2} \quad (17)$$

ここで  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  はローレンツ因子である。また、速さ  $v$  の符号を逆転させれば、 $S'$  系の量を  $S$  系

無限長直線電流から遠ざかる荷電粒子が受ける力

の量で書いた逆変換式が得られる。

式 (17) で示した力のローレンツ変換式を紹介している教科書は少ないかもしれないので、簡単に導出方法を示しておく。S' 系での力  $F'_x = \frac{dp'_x}{dt'}$  の右辺に、運動量と時間のローレンツ逆変換式を代入すると

$$F'_x = \frac{F_x - (v/c^2) \frac{dE}{dt}}{1 - vu_x/c^2} \quad (18)$$

となる。ここで、アインシュタインの関係式  $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$  より ( $m_0$  は静止質量)

$$E \frac{dE}{dt} = c^2 \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} \quad (19)$$

が得られるが、 $E = mc^2$  より (ここで  $m = \gamma m_0$ )

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{P}}{m} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (20)$$

となる。これは、ニュートン力学と同じく、エネルギーの時間変化率は、力が行った仕事に等しいことを意味している。よって、

$$F'_x = \frac{F_x - (v/c^2) \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{1 - vu_x/c^2} \quad (21)$$

が得られる。速度  $v$  の符号を逆転させれば前掲の式 (17) の  $F_x$  が得られる。

#### 参考文献

- [1] 遠藤雅守, 「史上最強図解 これならわかる! 電磁気学」, ナツメ社 (2014), 218–224.
- [2] 遠藤雅守, 「電磁気学」—初めて学ぶ電磁場理論, 森北出版 (2013), 159–163.
- [3] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands, 宮島龍興訳, 「ファインマン物理学 III 電磁気学」岩波書店 (1969), 166–171.
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 恒藤敏彦, 広重徹訳, 「場の古典論—電気力学, 特殊および一般相対性理論—」東京図書株式会社 (1978).
- [5] W. Rosser, 三島信彦訳, 「相対論と高エネルギー物理」共立出版 (1973).