学籍番号　　　　　　氏名　　　　　　　　　　得点

Q1 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(1,2,-1)$[m]にあり，質量 1 kg，速度ベクトル $\boldsymbol{v}=(1,-3,2)$ [m/s]を持つ質点がある．以下の問いに答えよ．

(1) 質点の角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ を求めよ(10).

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=(1,-3,-5)\quad[\mathrm{kgm^2/s}]$$

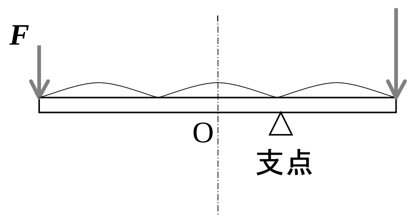
(2) この質点に $\boldsymbol{F}=(1,5,1)$ [N]の力を加えた．質点に働く力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を求めよ(10).

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 5 & 1\end{vmatrix}=(7,-2,3)\quad[\mathrm{Nm}]$$

(3) 力を加えた結果，角運動量の大きさは増加するか，減少するか．根拠とともに示しなさい(10).

角運動量の変化率がモーメント．これが，角運動量と同じ方向なら大きさは増加，逆方向なら減少する．その判断は，角運動量とモーメントの内積を取り，符号を見れば良い．$(1,2,-1)\cdot(7,-2,3)=-2$．角運動量の大きさは減少する．

Q2: 図の様な長さ 3L のシーソーのつり合いを考える．支点は棒の長さの 1/3 の位置にある．棒は軽く，支点の上で滑ることができ，棒と支点の間の摩擦は無視できる．

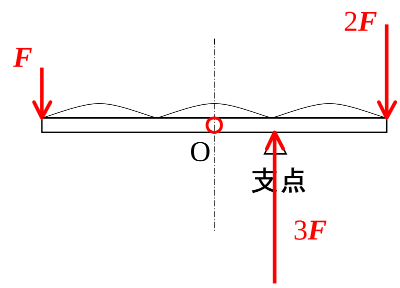


(1) 左端を大きさ F の力で垂直に押したとき，つりあいを保つため右端に垂直に加える力の大きさを答えよ(10).

支点を原点としてモーメントのつり合いを求める．右端の力を F_r とすれば，$2LF=LF_r$．F_rについて解き，$F_r=2F$．もちろん，こんな事をしなくても，我々は日常的な感覚で右端の力が 2F であることを知っている．

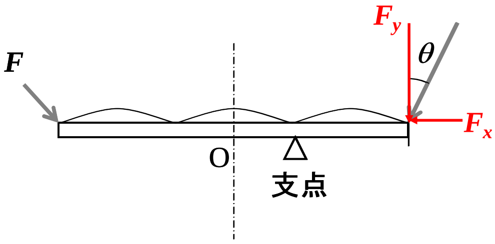
(2) 「つりあいとは，物体に加わるモーメントの和がゼロ」という定理があるが，これは原点をどこにとっても成立する．(1)のつりあい状態において，棒の中央 O を原点としたときの左端，右端の力のモーメントを求めよ．左回りのモーメントを正とする(5×2=10).

左：$\dfrac{3LF}{2}$，右：$-\left(\dfrac{3L}{2}\cdot 2F\right)=-3LF$



足してもゼロにならないが，中央を原点にとるとき，「支点に働く力」がモーメントを持つことに注意せよ．大きさは$\left(\dfrac{1}{2}L\cdot 3F\right)=\dfrac{3LF}{2}$．三つの力のモーメントを足せばゼロになる．

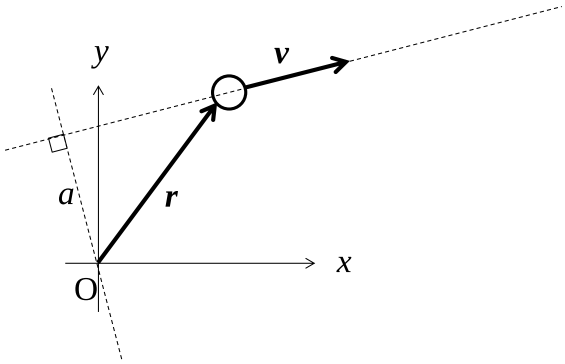
(3) 左端の力を図のように斜め 45º とした．棒を静止させるために加える右端の力の角度 θ を求めよ(10).



棒が静止するためにはモーメントの和と合力がどちらもゼロになる必要がある．支点を中心としたモーメントは F_y，棒を横にずらそうとする力は F_x．左側の力を F とすれば，$F_x = \dfrac{F}{\sqrt{2}}$，$F_y = \dfrac{2F}{\sqrt{2}}$，大きさは

$\sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}F$，$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ より $\theta = 26.6^\circ$

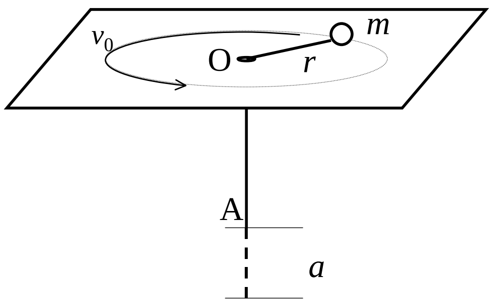
Q3: 図のような軌跡を等速直線運動する質量 m の物体の角運動量を求め，デカルト座標で成分表示しなさい(10).



$L = rmv\sin\theta = mva$．向きは z 軸のマイナス方向.

答：$(0,\ 0,\ -mva)$

Q4 水平に固定されたなめらかな板の中心に開けられた小さい穴 O に軽い糸を通し，質量 m の小球 P を付ける．糸の他端 A を持ち，糸を張ったまま小球に初速 v_0 を与え，板上で半径 r の等速円運動をさせた．



(1) ひもを距離 $a(<r)$だけゆっくり引き下げた．その後の小球の円運動の速度を求めよ(10).

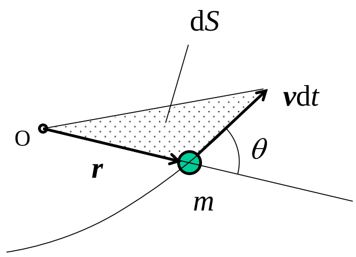
おもりは中心力で引かれるので角運動量は保存される．$rmv_0 = (r-a)mv$ を変形，

$$v = \frac{r}{(r-a)}v_0$$

(2) 手を離すと，小球は等速直線運動を始めた．小球の角運動量の大きさを求めよ(10).

角運動量は保存されるので，$L = rmv_0$

Q5: O 点に恒星があり，質量 m の惑星が恒星の周りを公転している．ケプラーの法則「面積速度一定」とは，右図の $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ が時間によらないことを表す．これを，角運動量保存則から説明せよ(10).



$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}| = \dfrac{1}{2}\dfrac{L}{m}$．一方，万有引力は中心力だからモーメントはゼロで，角運動量は保存される．惑星の質量も一定だから，面積速度は変化しない．