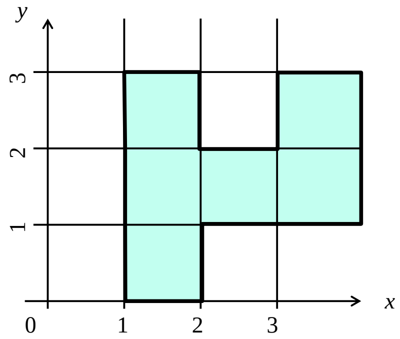
「応用力学同演習」問題(13)　　2016.07.04

学籍番号　　氏名　　得点

Q1. 次のような形の一様で薄い板の質量中心の座標を計算せよ(10).



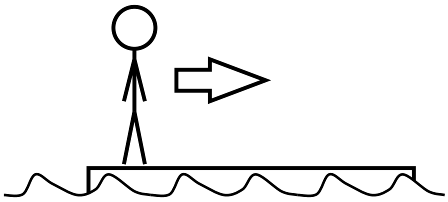
1 辺 1 のタイルを質点とみなし計算する.

$$x_G = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\times 3+\frac{5}{2}\times 1+\frac{7}{2}\times 2\right)=\frac{7}{3}$$

$$y_G = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\times 1+\frac{3}{2}\times 3+\frac{5}{2}\times 2\right)=\frac{5}{3}$$

答：$\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Q2: 水に浮いている長さ L，質量 M の板の上を，図のように質量 m の人が左端から右端まで歩いた．人が右端で静止したとき，板はどちらにどれほど動いたか．右向きを正として符号付きで答えよ．板は水面を摩擦なく動けるものとする(10).



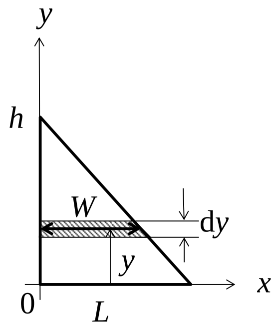
人と板を一つの系とする．水平方向の力は内力だけなので，系の水平方向の質量中心は変化しない．最初の，板の中心を原点とする．

人が左端のとき，$x_G = \dfrac{-mL}{2(m+M)}$．人が右端のときの板の中心を X とすると，

$$x_G = \frac{m(L/2+X)+MX}{m+M}=\frac{-mL}{2(m+M)}$$．X について解けば，$X=-\dfrac{mL}{m+M}$

Q3: 一様な厚さの三角形の板の質量中心を求める．ここでは y_G を求めよう．以下の問に答えよ．

(1) 底辺の長さが L，高さ h の三角形の，高さ y における横幅 W を求めよ(10).



$$W=\frac{L}{h}(h-y)$$

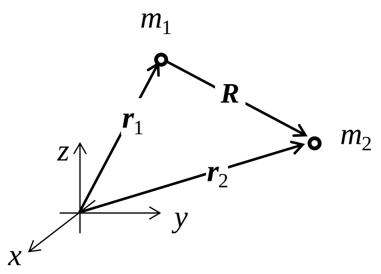
(2) W に y を掛け，0 から h まで積分せよ(10).

$$\int_0^h yW\mathrm{d}y = \int_0^h \frac{Ly}{h}(h-y)\mathrm{d}y = \frac{L}{h}\left[-\frac{y^3}{3}+h\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{Lh^2}{6}$$

(3) ρ=1 とすれば，y_G は(2)の積分値を三角形の面積で割ったものである．y_G を求めよ．

三角形の面積は $\dfrac{Lh}{2}$．割り算して重心の高さは $\dfrac{h}{3}$．同様の計算で x_G=$\dfrac{L}{3}$ であることもすぐわかる．

Q4: 互いに万有引力を及ぼしあい，3 次元空間で運動する質点 m_1，m_2 がある．m_1，m_2 の位置を $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，m_1 から見た m_2 の位置を $\boldsymbol{R}$ と定義する．下の問に答えなさい．万有引力定数を G とする．**R(R の大きさ)と $\boldsymbol{e}_R$ (R 方向の単位ベクトル)を使って解答すること**．ベクトルとスカラを混同している解は不正解とする．



(1) m_1，m_2 の運動方程式(ベクトル)をそれぞれ書きなさい(5×2).

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}=G\frac{m_1m_2}{R^2}\boldsymbol{e}_R \qquad m_2\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}=-G\frac{m_1m_2}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

(2) (1)の結果を用い，$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=R\boldsymbol{e}_R$ を使って R(スカラ)が従う運動方程式を求めなさい(10).

※ヒント：$\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}=\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}=-G\frac{m_1}{R^2}\boldsymbol{e}_R-G\frac{m_2}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

$$=-\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{R^2}$$

(3) m_1 から見た m_2 の運動方程式は $m^*\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}=F\left(R\right)\boldsymbol{e}_R$ と書ける．本問における $F\left(R\right)$ を示しなさい(10).

$-G\dfrac{m_1m_2}{R^2}$．素直に(1)の解から，m_2 が感じる力を示す.

(4) m_2 が m_1 から見て円運動をしているとき，その公転周期を m^*を使い表しなさい(10).

円運動の公式，$F_r=m^*\dfrac{v^2}{R}$ から $v=\sqrt{\dfrac{Gm_1m_2}{m^*R}}$，$T=\dfrac{2\pi R}{v}=\sqrt{\dfrac{4\pi^2R^3m^*}{Gm_1m_2}}$．

変形すると $T=\dfrac{2\pi R}{v}=\sqrt{\dfrac{4\pi^2R^3}{G\left(m_1+m_2\right)}}$ になり，これは，「質量 $\left(m_1+m_2\right)$ の惑星の周りを回る衛星の運動」とみなすことができる．周期が 2 つの質量の和で決まることに注意.

(5) (3)において m_1>>m_2 が成り立つとき，m_2 の周期の近似式を示しなさい(10).

$m_1>>m_2$ のとき $m^*\approx m_2$ だから代入して $T=\sqrt{\dfrac{4\pi^2R^3}{Gm_1}}$．地球を回る人工衛星を考えるとき，衛星の公転周期は軌道半径のみに依存して，衛星の質量によらないことになる．これが，人工衛星が互いに衝突しない理由である.