学籍番号　氏名　得点

重力加速度の大きさを g とせよ．

Q1: 質量 1,500kg の自動車が時速 100km で走行中，1.0m/s^2 の加速度で加速を始めた．以下の問いに，「**仕事−エネルギー定理**」を用いて答えなさい．ただし走行に伴う抵抗は無視する．

(1) 加速開始から 100m 走った地点における自動車の運動エネルギー増加量(10)

$F=ma$ からエンジンが出す力がわかる．計算すると 1.5×10^3 N で，仕事-エネルギー定理から，増加した運動エネルギーは $\Delta K= F\Delta x$=1.5×10^5 J.

(2) 加速開始から 100m 走った地点における自動車の速さ(10)

加速前の運動エネルギーを求めると，100 km/h=27.8 m/s で $K=\frac{1}{2}mv^2=5.8\times10^5\,\mathrm{J}$．(1)で求めた増加分を加え，再び $K=\frac{1}{2}mv^2$ を使って速度を求めると 31 m/s．時速に換算すると 112 km/h.

Q2: 一次元の座標 r 軸上で，電荷 q_2 が電荷 q_1 から受ける静電気力は $\boldsymbol{F}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ と与えられる．q_2 を $r=a$ から $r=b$ まで動かした時，静電気力がした仕事を求めよ (10).

$$W=\int_a^b \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

Q3: フックの法則に従わない，$F(x)=-ax-bx^2$ (x<0，a，b は定数)というばねがある．ここで x はばねの伸びである．以下の問に答えよ．

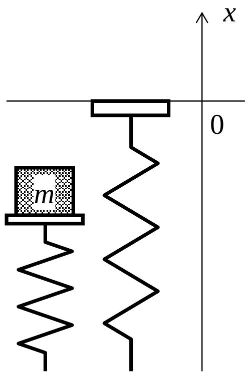
(1) このばねの弾性エネルギーを x の関数で示しなさい(10).

$$U(x)=-\int_0^x F\mathrm{d}x=\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{3}x^3$$

(2) このばねに軽い皿を取り付け，鉛直に保持した．皿に質量 m のおもりを載せたとき，ばねは平衡の位置からどれほど縮むか答えよ(10).

鉛直に x 軸を取り，上向きを正とする．力の釣り合いから，$-ax-bx^2-mg=0$．

$\therefore x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4bmg}}{2b}$．$x$<0 は確実なので正の項を捨て，$x=\frac{-a-\sqrt{a^2-4bmg}}{2b}$．



(3)　(2)の状態からばねを軽く押すと，ばねは振動運動を始めた．図のように座標を取り，ばねの運動 $x(t)$ の運動方程式を立てなさい (10).

素直に，$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-ax-bx^2-mg$．この運動方程式は非線形で，容易には解けない．

Q4: $\boldsymbol{F}=\left(x^2-y\right)\boldsymbol{i}+\left(y^2-x\right)\boldsymbol{j}$ と表される力場がある．

(1)　座標(2, 1)において物体が受ける力をデカルト座標で成分表示せよ(10).

簡単な問題．x に 1，y に 1 を代入，$\boldsymbol{F}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$．

(2)　この力場で，物体が力を受けない点が複数ある．その座標をすべて答えよ(10).

$\left(x^2-y\right)=0$ と $\left(y^2-x\right)=0$ から x=0，±1．同様に y=0，±1．実際に力の式に代入すれば，ゼロとなるのは (0, 0)と(1, 1)のみである．

(3)　場は保存力場であることを証明せよ(10).

$\dfrac{\partial F_y}{\partial x}=\dfrac{\partial F_x}{\partial y}$ を示せば良い．計算するとどちらも−1 なので，力は保存力である．

(4)　このような力を生むポテンシャル(スカラー場)$U(x, y)$をひとつ求めよ(10).

$-\dfrac{\partial U}{\partial x}=F_x$，$-\dfrac{\partial U}{\partial y}=F_y$ となるような U を求めればよい．微分の逆は積分なので，以下の関係が成立．

$U=-\int F_x\mathrm{d}x=-\dfrac{x^3}{3}+xy+f\left(y\right)$　($f(y)$は任意の y の関数)

$U=-\int F_y\mathrm{d}x=-\dfrac{y^3}{3}+xy+f\left(x\right)$　($f(x)$は任意の x の関数)

これらを同時に満たす U の例は $U=-\dfrac{1}{3}\left(x^3+y^3\right)+xy$ である．これに定数がついても $\boldsymbol{F}$ は変わらない．

これを「ポテンシャルの任意性」と呼ぶ.