応用力学及び演習 中間試験１　解答

問題１

■1-(1)　物体は x 軸方向には加速度ゼロ、y 軸方向には加速度 $-g$ で等加速度運動をしている。初速度が $(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$、初期位置が $(x,y)=(0,0)$ であるので、投げ出してから時刻 t だけ経った際の物体の速度は、

$$v_x = v_0\cos\theta,\quad v_y = -gt + v_0\sin\theta \tag{1}$$

となり、また物体の位置座標は、

$$x = v_0\cos\theta t,\quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta t \tag{2}$$

となる。

■1-(2)　最高点では y 方向の速度がゼロとなるので、$v_y = -gt + v_0\sin\theta = 0$ より、時刻 $t = \frac{v_0\sin\theta}{g}$ で最高点になる。したがって、地面からの高さは $t = \frac{v_0\sin\theta}{g}$ における y 座標の値を求めればよいので、

$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2 + v_0\sin\theta\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} \tag{3}$$

が、最高点における地面からの高さとなる。

■1-(3)　物体の軌跡は (2) 式から t を消去して、x, y の関係式を求めればよい。よって、答えは、

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + x\tan\theta \tag{4}$$

となる。

■1-(4)　投げ出した位置から水平距離 L にある高さ h の壁を超えるということは、(4) より、

$$h < -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}L^2 + L\tan\theta \tag{5}$$

が成り立っていれば良い。これを書き換えると、

$$v_0^2 > \frac{gL^2}{2\cos^2\theta(L\tan\theta - h)} \to v_0 > \sqrt{\frac{gL^2}{2\cos^2\theta(L\tan\theta - h)}} \tag{6}$$

となるので、壁を超えるためには、初速度の大きさを $\sqrt{\frac{gL^2}{2\cos^2\theta(L\tan\theta-h)}}$ より大きくする必要がある。

問題２

■2-(1)　重力を斜面に平行な方向と垂直な方向に分解すると大きさはそれぞれ $mg\sin\theta$、$mg\cos\theta$ となる。さらに、斜面に垂直に垂直抗力、そして、斜面が滑り落ちるのを妨げる向きに静止摩擦力 μN が働いている。よって、斜面に平行な方向の力のつり合いの式は、

$$mg\sin\theta_0 = \mu N \tag{7}$$

となり、斜面に垂直な方向の力のつり合いの式は、

$$mg\cos\theta_0 = N \tag{8}$$

となる。

■2-(2)　(7) 式、(8) 式を解くと、$\mu = \tan\theta_0$ を得る。

問題３

■3-(1)　抵抗力は鉛直上向きに大きさ $|cv|$ で働く。この時、$v < 0$ に気を付けると、抵抗力は $-cv$ となる。よって、速度 v に関する運動方程式は、

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - cv \tag{9}$$

となる。

■3 - (2)　終端速度では速度が変化しないため、$\frac{dv}{dt} = 0$ であり、

$$-mg - cv = 0 \to v = -\frac{mg}{c} \tag{10}$$

である。よって、その大きさは $|v| = \frac{mg}{c}$。

問題４

■4-(1)　鉛直上向きに y 軸をとり、ばねの自然長の位置を $y = 0$ とする。この時、フックの法則より、物体の位置を y とすると、力のつり合いは、

$$-mg - ky = 0 \to y = -\frac{mg}{k} \tag{11}$$

となる。よって、$y = 0$ からのばねの伸びは $\frac{mg}{k}$ である。

■4-(2)　ばねに取り付けられた物体の運動方程式は、

$$m\frac{dy^2}{dt^2} = -mg - ky = -k\left(y + \frac{mg}{k}\right) \to \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(y + \frac{mg}{k}\right) \tag{12}$$

である。よって、これは $y = -\frac{mg}{k}$ を中心とする単振動の式を表し、角振動数は、$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ となる。したがって、単振動の周期は、$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ となる。

■4-(3)　重力が行った仕事は、

$$\int_{-L-\frac{mg}{k}}^{L-\frac{mg}{k}} (-mg)dy = [-mgy]_{-L-\frac{mg}{k}}^{L-\frac{mg}{k}} = -2mgL \tag{13}$$

となる。

■4-(4)　ばねが行った仕事は、

$$\int_{-L-\frac{mg}{k}}^{L-\frac{mg}{k}} (-ky)dy = \left[-\frac{1}{2}ky^2\right]_{-L-\frac{mg}{k}}^{L-\frac{mg}{k}} = 2mgL \tag{14}$$

となる。

■4-(5)　エレベーターの中の人からは、ばねには慣性力が鉛直下向きに大きさ ma で働いている。よって、力のつり合いの式は、

$$-mg - ma - ky = 0 \rightarrow y = -\frac{m(g+a)}{k} \tag{15}$$

となるので、ばねの自然長からの伸びは $\frac{m(g+a)}{k}$ である。

問題 5

■5-(1)　地球から月に働く重力 $G\frac{Mm}{R^2}$ が等速円運動の向心力を与えているので、

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \tag{16}$$

となる。よって、月の速さは $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ である。また、周期は

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{17}$$

である。

■5-(2)　(17) 式より、地球の中心から月までの距離は、

$$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{18}$$

となる。よって、問題文で与えられた数値を代入すると、

$$R = \left(\frac{(6.67\times10^{-11})\times(5.97\times10^{24})\times(2.36\times10^6)^2}{4\times3.14^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 3.831\cdots\times10^8 \rightarrow 3.83\times10^8 \tag{19}$$

となるので、$R = 3.83\times10^8\mathrm{m}$ である。