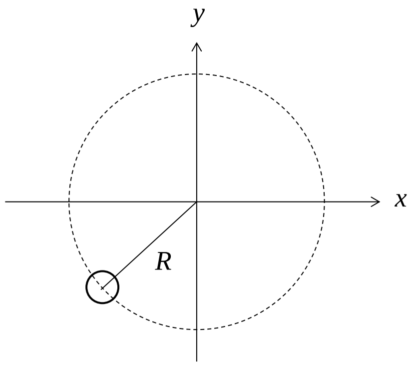
学籍番号　　　　　　　　氏名　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　得点

重力加速度の大きさを g とせよ

Q1: 摩擦のない水平な床面で，長さ R のひもにつながれ，一定の角速度 ω で運動する質量 m の点について以下の問に答えよ．ひもの一端を原点とする 2 次元デカルト座標を採用する．



(1) 時刻ゼロで点は y 軸上，$y>0$ の位置にいた．点の運動をデカルト座標で成分表示せよ(10).

$(x,y)=\left\{R\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right),R\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$．$(x,y)=\{-R\sin(\omega t),R\cos(\omega t)\}$ でも良い．

(2) 点の速度 $\boldsymbol{v}$ は，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と直交することを示せ (10).

$(v_x,v_y)=\{-R\omega\cos(\omega t),-R\omega\sin(\omega t)\}$．直交性を示すには内積を取る．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}&=\{-\omega R\cos(\omega t),-\omega R\sin(\omega t)\}\cdot\{-R\sin(\omega t),R\cos(\omega t)\}\\&=R^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)-R^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)\\&=0\end{aligned}$$

(3) 点の加速度 $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{r}$ を使い表わせ (10).

$(a_x,a_y)=\{R\omega^2\sin(\omega t),-R\omega^2\cos(\omega t)\}$

$\therefore\ \boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r}$．ベクトル表記(太字)になっていない解は不正解．

Q2:一般に，質量 m の質点の運動方程式は，極座標では以下のように書かれる(第 3 回演習参照).

$$m\left\{\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}=F_r,\qquad m\left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)=F_\theta$$

(1) m が原点を中心とする等速円運動を行うとき，$F_\theta=0$ であることを示せ(10).

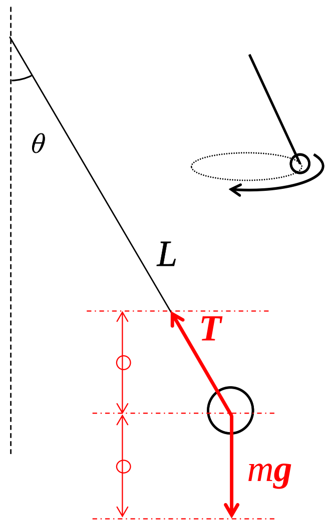
等速円運動の条件は $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\mathrm{const}$．これを $m\left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)=F_\theta$ に代入すれば，$F_\theta=0$ とわかる．

(2) m が原点を中心とする等速円運動を行うとき，F_r を求めよ(10).

$m\left\{\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}=F_r$ に $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=0$ を代入，$F_r=-mr\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$．ここから直ちに F_r が一定かつ中心力であることが導かれる．極座標表示の威力を感じてほしい．

Q3: 角速度ベクトルが $\boldsymbol{\omega}$=(1, 0, 1)と表される等速円運動の，ある瞬間の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}$=(2, 1, 0)であった．速度ベクトルを求めよ(10).

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Q4: 図のように，天井から長さ L のひもで吊るされた質量 m の小球が等速円運動を行っている．ひもは鉛直線に対して角度 θ になっている．

(1) 小球に働く張力の大きさを求めなさい(10).

上下方向の力は打ち消し合うので，$T\cos\theta = mg \rightarrow T=\dfrac{mg}{\cos\theta}$.

(2) 小球の回転速度を求めなさい．回転半径が $L\sin\theta$ であることに注意せよ(10).

向心加速度は $a = g\tan\theta$ で，回転半径は $L\sin\theta$．公式を使い，

$$g\tan\theta = \frac{v^2}{L\sin\theta} \rightarrow v=\sqrt{\frac{Lg\sin^2\theta}{\cos\theta}}\ .$$

(3) 小球の回転周期を求めなさい(10).

公式 $T=\dfrac{2\pi\times L\sin\theta}{v}$ を適用して，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$.

Q5: 自動車が一定の速さで半径 R の円弧状のカーブを曲がる．タイヤと道路の摩擦は静止摩擦と考えて良い．静止摩擦係数を μ_s, 路面が水平のとき，自動車がカーブを曲がれる最大の速さを求めなさい(10).

自動車の質量を m と仮定．F_r の最大値は $\mu_s mg$，これが最大速度で回る向心力だから，$\mu_s mg = m\dfrac{v^2}{R}$.

$$v_{\max}=\sqrt{\mu_s Rg}\ .$$