

学籍番号

氏名

得点

重力加速度の大きさを g とせよ

Q1: 流体から受ける抵抗は速度に比例する「粘性抵抗」と速度の 2 乗に比例する「慣性抵抗」の和である。断面が半径 r の円形の物体が粘性率 η の流体から受ける粘性抵抗力は $6\pi\eta rv$ ，慣性抵抗は比例定数を c として cr^2v^2 と書ける。SI 単位系における c の単位を， $[\text{kg}][\text{m}][\text{s}]$ のいずれかを使い表わせ(10)。

$[\text{N}]=[\text{c}][\text{m}]^2[\text{m/s}]^2$. $[\text{N}]=[\text{kg}][\text{m}]/[\text{s}]^2$ だから， c の単位は kg/m^3 .

Q2: 典型的には c の大きさを 1.0(SI 単位)としてよい。粘性抵抗 \gg 慣性抵抗の領域を「粘性領域」，その反対を「慣性領域」と呼ぶ。空気の粘性率を $\eta=1.8\times 10^{-5}\text{Ns}/\text{m}^2$ とする。

- (1) 空気中を落下する $r=1.0\text{mm}$ の雨粒が粘性領域にある最大の速度を求めよ。ここで粘性領域が成り立つ条件を[粘性抵抗]/[慣性抵抗] >10 とする(10)。

条件は $\frac{6\pi\eta}{rv} > 10$. 変形して， $v < \frac{6\pi\eta}{10r} = 3.4\times 10^{-2}\text{m/s}$. 雨粒は落下に伴い粘性領域から慣性領域に移行する。

- (2) 空気中を落下する $r=5.0\text{m}$ のパラシュートが慣性領域にある最小の速度を求めよ。ここで慣性領域が成り立つ条件を[粘性抵抗]/[慣性抵抗] <0.1 とする(10)。

条件は $\frac{6\pi\eta}{rv} > 0.01$. 変形して， $v > \frac{6\pi\eta}{0.1r} = 6.8\times 10^{-4}\text{m/s}$. パラシュートは慣性抵抗で良く近似される。

Q3: 速度に比例する抵抗を受けながら運動する物体の運動を解析する。鉛直上向きに y 軸を取り，抵抗は以下の式で表されるとする。

$$R = -cv$$

R	抵抗力
c	抵抗係数
v	物体の速度

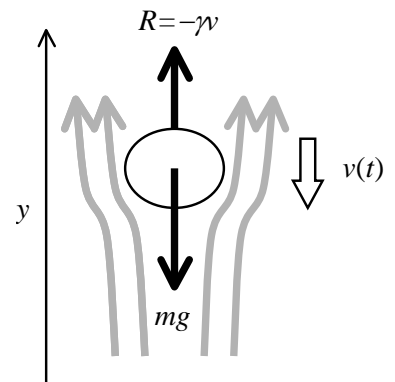
- (1) v に関する運動方程式(1 階の微分方程式)を立てなさい (10)。

$$m\dot{v} = -mg - cv .$$

- (2) 運動方程式を解きなさい。積分定数を C とせよ (10)。

解き方は問わないが，線形微分方程式の一般的解法で解くと，同次形の一般解が $v(t) = Ce^{-\frac{c}{m}t}$. 特殊解は

$$v(t) = -\frac{mg}{c} . \text{ 足して，一般解は } v(t) = Ce^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c} . \quad (C \text{ は任意の定数}).$$



(3) $t=0$ で物体を初速度 $\frac{mg}{c}$ で上向きに投げあげた. $v(t)$ を定めよ(10).

$$v(0) = C - \frac{mg}{c} = \frac{mg}{c} \text{ から } C = \frac{2mg}{c}. \quad \rightarrow \quad v(t) = \frac{mg}{c} \left(2e^{-\frac{c}{m}t} - 1 \right).$$

Q4: パラシュートの落下は慣性領域の近似がよく成り立ち, 運動方程式は上向きを正として

$$m\dot{v} = -mg + \beta S \frac{1}{2} \rho v^2$$

β 空気抵抗係数 S パラシュートの断面積 ρ 空気の密度 (1.3kg/m^3)

である.

(1) 時刻ゼロでパラシュートは静止状態とする. 加速度を求めよ(10).

$v=0$ のとき, 空気抵抗はゼロだから運動方程式は $m\dot{v} = -mg$ と書ける. 加速度は $-g$.

(2) 終端速度を求めよ(10).

$$mg = \beta S \frac{1}{2} \rho v^2 \text{ を変形し, } v = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho\beta S}}$$

(3) パラシュートが $-a$ の加速度で落下中のとき, パラシュートの紐の張力の大きさを求めよ. パラシュートは軽く, 質量は無視できる(10).

パラシュートに吊られている質量 m の物体に掛かる力は重力 $-mg$ と張力 T である. $-mg + T = -ma$ の関係が成り立ち, T について解けば $T = m(g - a)$.

(4) 終端速度が同じ, 粘性領域の落下と慣性領域の落下を比べる. 図は粘性領域の v - t グラフである. ここに慣性領域の v - t グラフを書き加えなさい(10).

粘性抵抗を k_1v , 慣性抵抗を k_2v^2 とすれば,
 $k_1v_t = mg$, $k_2v_t^2 = mg$ が成立. したがって $k_2v_t = k_1$ の関係がある. 慣性抵抗を k_1 を使い書き直すと
 $= k_1v \left(\frac{v}{v_t} \right)$ で, 慣性抵抗は常に粘性抵抗より小さい.
 したがって物体は「早く落ちる». 初期の加速度は, $v \sim 0$ のときはどちらも mg で等しいので図のようなグラフが描ける.

