学籍番号　　　　　　氏名　　　　　　　　　　　　　　得点

Q1: 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(1,2,-1)$ にあり，質量 2，速度ベクトル $\boldsymbol{v}=(-2,3,2)$ を持つ質点がある．以下の問いに答えよ．

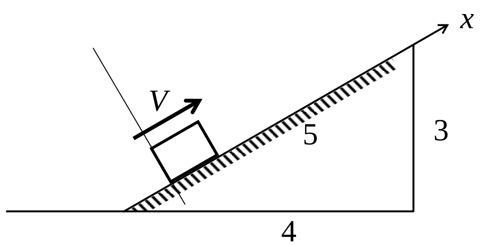
(1) 質点の角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ と定義される物理量である．角運動量を求めよ(10).

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=2\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=(14,0,14)$$

(2) この物体は，原点から遠ざかっているか，近づいているか，根拠を示して述べよ(10).

位置ベクトルと速度ベクトルの内積を取る．$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}=2$，すなわち，物体は原点に対して遠ざかっている．

Q2:図のように，斜面上を上向きに滑る質量 m の物体がある．斜面の形は 3: 4: 5 の直角三角形で，斜面と物体の間の動摩擦係数は 1/2 である．重力加速度の大きさを g とする．



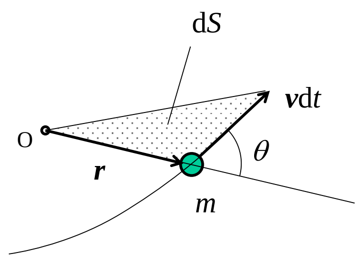
(1) 斜面上方に x 軸をとり，運動方程式を立てなさい(10).

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-mg$$

(2) 時刻ゼロで物体は x=0 におり，速度 V であった．物体は斜面上をどこまで登ることができるか答えよ(10).

運動を決定すれば，$x=-\frac{1}{2}gt^2+Vt$，$v=-gt+V$．v=0 になる時刻は $T=\frac{V}{g}$．T を x に代入し，$x=\frac{V^2}{g}$．

Q3: ニュートンは，ケプラーの第 2 法則「惑星の軌道が一定時間に掃く面積は一定」(面積速度一定の法則)から，「惑星に働く力が中心力である」ことを見抜いた．以下の問に答えよ．ここで，面積速度一定の法則は，数式では rv_θ=const.と書き換えられる．



(1) 極座標の運動方程式は，成分ごとに書き下せば

$$r:\ m\left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}=F_r \qquad \theta:\ m\left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)=F_\theta$$

である．θ 成分に注目する．はじめに，$r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を時間で 1 階微分せよ(10).

積の微分公式と，合成関数の微分公式を使う．$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right)=2r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$．

答えは $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=2r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+r^2\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

(2) (1)の結果を用い，θ 成分の運動方程式を $r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を使い書き換えよ(10).

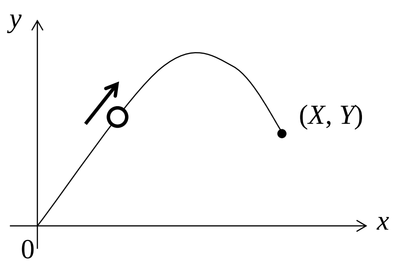
(1)の解を r で割ればの運動方程式 θ 成分が現れる．

したがって，運動方程式は $\dfrac{m}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=F_\theta$ と書き換えられる．

(3) 惑星に働く力が中心力であることを示しなさい(10).

(2)の解から，$r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\mathrm{const.}$ なら $F_\theta=0$ が言える．$r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=rv_\theta$ だから，面積速度一定なら $F_\theta=0$，すなわち力は中心力である．

Q4: 図の様に，原点(0, 0)と点(X, Y)を通る放物運動を実現したい．以下の問に答えよ．重力加速度の大きさを g とする．



(1) 物体は時刻ゼロで原点から投げ上げられる．いま，仮に物体が時刻 T で点(X, Y)を通過したとする．初速度の x 成分，y 成分に課せられる条件を，T を使い示しなさい(10×2=20).

初速度の x 成分，y 成分を V_x，V_y とすると，

V_x:　$V_xT=X$　　　　V_y:　$-\dfrac{1}{2}gT^2+V_yT=Y$

(2) 初速度の x 成分を V と決めた．初速度の y 成分を求めよ．T を使わず解答すること(10).

$V_xT=X$ を T について解き，V_y の条件に代入すると放物線の式を得る．

$$-\frac{1}{2}g\frac{X^2}{V_x^2}+\frac{V_y}{V_x}X=Y$$

これを V_y について解き，V_x に V を代入．$V_y=\dfrac{Y}{X}V+\dfrac{1}{2}g\dfrac{X}{V}$．