

学籍番号

氏名

得点

指示がない限り重力加速度の大きさを  $g$  とせよ. 空気抵抗は無視する.

Q1: 高さゼロの地上から, 真上に初速度  $V$  で物体を打ち上げる. 物体が再び地面に落下する時刻を求めよ(10).

素直に運動方程式を立てると,  $m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$ . これは簡単に解けて, 初期条件を代入すると  $y = -\frac{1}{2}gt^2 + Vt$

を得る.  $y=0$  となる  $t$  を求めるため, 左辺にゼロを代入,  $t$  について解けば  $t = \frac{2V}{g}$ .

Q2: 水平に  $x$  軸, 鉛直上向きに  $y$  軸を取る. 時刻ゼロで質量  $m$  の物体を  $(2, 0)$  から初速度  $2\sqrt{2}V$ , 角度  $\frac{\pi}{4}$  で斜め上方に投げあげた. 以下の問に答えよ.

(1) 物体の運動方程式を  $x, y$  それぞれについて示しなさい(5×2=10).

$$x: m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$y: m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

(2) 運動を決定せよ(10).

$x$  方向:  $\frac{dx}{dt} = C_1$ . 初期条件を代入して  $C_1 = 2V$ .  $x = 2Vt + C_2$ . 初期条件を代入,  $C_2 = 2$ .  $x(t) = 2Vt + 2$ .

$y$  方向:  $\frac{dy}{dt} = -gt + C_1$ . 初期条件を代入して  $C_1 = 2V$ .  $y = -\frac{1}{2}gt^2 + 2Vt + C_2$ . 初期条件を代入,  $C_2 = 0$ .

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2Vt.$$

(3) 物体の最小の速さを求めよ(10).

速さは  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4V^2 + (-gt + 2V)^2}$ . 最小の速さは  $-gt + 2V = 0$  のとき得られる. 代入, 計算すれば

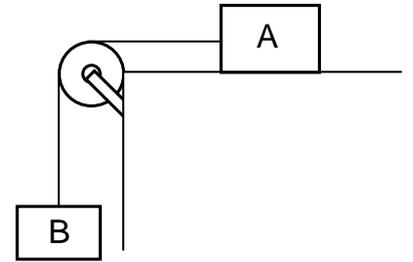
$v_{\min} = 2V$ . ※別解: 放物運動は  $x$  方向に等速,  $y$  方向は最上点で速度ゼロだから, ここが最小の速さであることは自明.

(4) 物体が落下した位置の  $x$  座標を求めよ(10).

物体が地面につく時刻は  $y = -\frac{gt^2}{2} + 2Vt = 0$  で,  $t=0$  は自明. もう一つの解は  $t = \frac{4V}{g}$  で, これを  $x(t)$  に代入

する.  $R = \frac{8V^2}{g} + 2$ .

Q3: 図のように、質量  $M$  のおもり A と質量  $m$  のおもり B が滑車で結ばれている。A は摩擦のない水平な床にある。時刻ゼロで手を離れたとき、以下の問いに答えよ。おもり A と B は一体となって運動することは明らかだから、おもり B の落下距離を変数  $y$  として運動を解析する。



(1) おもり A, B の運動方程式を立てよ。ここで、ひもの張力は未知なのでとりあえず  $T$  と置く ( $5 \times 2 = 10$ )。

$$\text{A: } M \frac{d^2 y}{dt^2} = T$$

$$\text{B: } m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - T$$

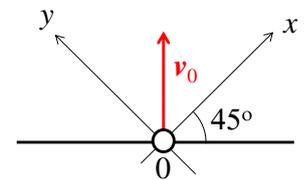
(2) (1)の解を用い、 $T$  を既知の量で表せる。 $T$  を求めよ (10)。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{T}{M} = g - \frac{T}{m}. \quad T \text{ について解き, } T = \frac{gmM}{m+M}.$$

(3) おもり A の運動方程式を解き、運動を決定せよ。時刻ゼロでおもり A は  $y=0$  で静止状態とする (10)。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{gm}{m+M}. \quad \text{あとは、いつもの通り解いて, } y = \frac{1}{2} \frac{gm}{m+M} t^2. \quad \text{加速度はプラスなので注意のこと。}$$

Q4: 運動は座標系の選び方によらないことを示す。右図のように、鉛直投げ上げ運動を、鉛直線から斜め  $45^\circ$  方向を向いた座標系で解く。物体の質量は  $m$ 、初速度を  $v_0$  とする。以下の問いに答えよ。



(1)  $x, y$  が従う運動方程式を示せ ( $5 \times 2 = 10$ )。

$$x: \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{mg}{\sqrt{2}}$$

$$y: \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{mg}{\sqrt{2}}$$

(2) 運動を定め、最高点の高さが  $\frac{v_0^2}{2g}$  であることを示しなさい (10)。

投げ上げ時刻を  $t=0$  として運動を決定すると、 $x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t - \frac{gt^2}{2\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t - \frac{gt^2}{2\sqrt{2}}$ .  $x$  の最大値は  $\frac{dx}{dt} = 0$  の

時刻で得られ、計算すると  $t_1 = \frac{v_0}{g}$ .  $x$  座標は  $x = \frac{v_0^2}{2\sqrt{2}g}$  である.  $y$  座標も同様に計算できて、原点からの

$$\text{距離は } \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$