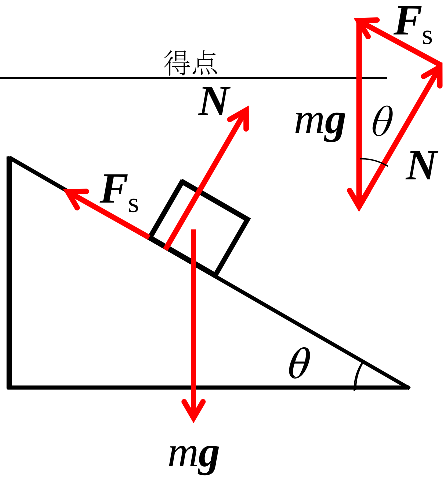
学籍番号 氏名 得点



Q1: 角度θの，摩擦のある斜面の上に質量 m のブロックが静止している．重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ．

(1) ブロックに働く摩擦力の大きさを求めよ(10).

右図が力のつりあい．物体が静止しているということは，摩擦力を含めた全ての力の合力をベクトル的に足すとゼロになる．したがって，

$F_s = mg\sin\theta$

(2) ブロックと床の間の静止摩擦係数は少なくともある値よりは大きいといえる．その値を答えよ(10).

静止摩擦係数の定義，$F_{smax} = \mu_s N$ から，ブロックが滑り出す限界のとき $\mu_s = \dfrac{F_{smax}}{N} = \tan\theta$ で，μ_s はそれよりは大きい．答えは $\mu_s \geq \tan\theta$.

Q2: 水平な床の上を質量 m のブロックが滑っている．ブロックと床の間の動摩擦係数を μ とする．重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ．

(1) 水平に x 軸を取る．運動方程式を立てなさい(10).

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\mu mg$$

(2) 時刻ゼロの位置は X，速度は V である．物体の運動を決定せよ(10).

運動方程式を積分，$x(t) = -\dfrac{1}{2}\mu g t^2 + C_1 t + C_2$ (C_1，C_2 は任意の定数)を得る．初期条件を代入して，

$$x(t) = -\frac{1}{2}\mu g t^2 + Vt + X \ .$$

(3) 物体が静止する位置を求めよ(10).

$t > 0$ で $V = 0$ となる t を求める．$-\mu g t + V = 0$ から，$t = \dfrac{V}{\mu g}$．$x(t)$に代入，$x = \dfrac{V^2}{2\mu g} + X$ を得る．

Q3. 二次元座標系における速度，加速度の極座標形式についての問に答えよ．解答で使って良い記号は r, θおよびそれらの時間微分($\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \cdots$, $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \cdots$)と単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ のみとする．

(1) $\boldsymbol{r}$ ベクトルを単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}$ を使い $r\hat{\boldsymbol{r}}$ と表した． $\boldsymbol{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ を問に指定された記号で表しなさい(10).

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\hat{\boldsymbol{r}}\right) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

(2) 極座標の単位ベクトルを微分するとゼロにならない理由を説明しなさい(10).

極座標では単位ベクトルは定ベクトルではなく時間の関数で変化するから．

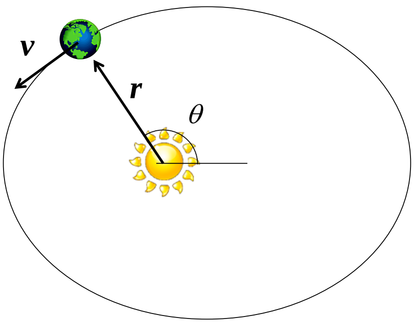
(3) 加速度 $\boldsymbol{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ を問に指定された記号で表しなさい(10).

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}}\right)$$

$$= \left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\hat{\boldsymbol{r}} + \left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Q4: 右図の様に，恒星の周囲をまわる質量 m の惑星の運動を考える．以下の各問に答えよ．



(1) 万有引力を $F_r\hat{\boldsymbol{r}}$ として極座標の運動方程式を立てなさい(10).

$$m\left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = F_r$$

$$m\left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right) = 0$$

(2) 惑星が一定の半径の円軌道を描くとき，その角速度 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ は一定でなくてはならないことを示せ(10).

$m\left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right) = 0$ に r 一定の条件を課せば $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 0$ ． ここから $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const}$ とわかる．