学籍番号　　　　　　　　氏名　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　得点

Q1: 2 次元極座標で点の運動が $(r,\theta)=(R,\omega t+\delta)$ と表されている．ここで R，δは定数である．以下の問に答えよ．

(1) 点の運動をデカルト座標で成分表示せよ(10).

$$(x,y)=\{R\cos(\omega t+\delta),R\sin(\omega t+\delta)\}$$

(2) 点の加速度をデカルト座標で成分表示せよ(10).

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)=\{-\omega^2R\cos(\omega t+\delta),-\omega^2R\sin(\omega t+\delta)\}$$

(3) 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$と表すとき，加速度ベクトルを位置ベクトルを用いて表わせ(10).

$\boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r}(t)$．ベクトルの表記方法がわかっているかどうかを確認する問題．ベクトルが太字になっていないもの，成分表示しているものなどは全て不正解．

Q2: 変位が $x(t)=(1-t)e^{-kt}$ (k は定数)で与えられる質点の運動の速度, 加速度を計算しなさい. (5×2=10).

速度

$$-e^{-kt}-k(1-t)e^{-kt}$$
$$=-(k+1-kt)e^{-kt}$$

加速度

$$ke^{-kt}-k(k+1-kt)e^{-kt}$$
$$=\{2k+k^2(1-t)\}e^{-kt}$$

Q3: 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(1,1,-1)$ にあり，質量 2，速度ベクトル $\boldsymbol{v}=(-2,3,1)$ を持つ質点がある．以下の問いに答えよ．

(1) 質点の角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ と定義される物理量である．角運動量を求めよ(10).

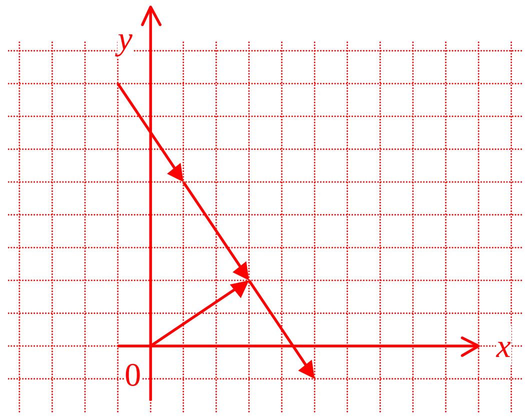
$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ -4 & 6 & 2\end{vmatrix}=(8,\ 2,\ 10)$$

(2) この物体は，原点から遠ざかっているか，近づいているか，根拠を示して述べよ(10).

位置ベクトルと速度ベクトルの内積を取る．$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=0$，すなわち，物体は原点に対して近づいてもいないし遠ざかってもいない．

Q4: 2 次元デカルト座標で，運動速度が$(2,-3)$と表される物体 a がある．時刻 0 で a の位置は$(-1,8)$であった．物体 a が原点に最も接近した瞬間の座標を求めよ(10).

図式的に考えれば，右図の様に答は$(3,2)$とわかるが，数式で考えると次の様になる．まず，点の座標を時刻 t の関数で表すと$(x,y)=(-1+2t,8-3t)$で，点が原点に最も近づくとき，点の速度ベクトルと位置ベクトルは直交するから，内積を取ればゼロとなる．すなわち，$2(-1+2t)-3(8-3t)=0$で，これを解いて t=2，a の座標は$(3,2)$とわかる．



Q5: ばねとおもりを組み合わせた系のおもりの運動は$x(t)=A\sin(\omega t+\delta)$と表される．ここで，$A$，$\omega$，$\delta$ は定数である．運動が運動方程式$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$の解であることを示しなさい(10).

$\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2A\sin(\omega t+\delta)$を左辺に，$x=A\sin(\omega t+\delta)$を右辺に代入する．すると

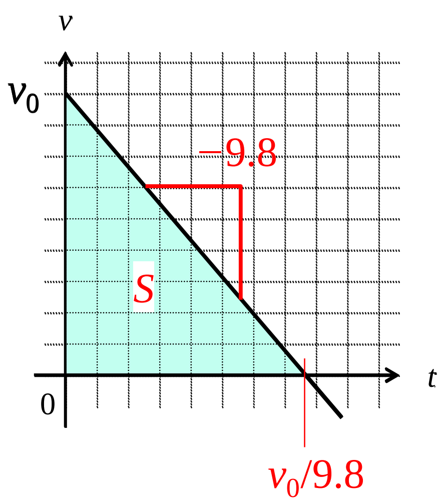
$-\omega^2A\sin(\omega t+\delta)=-\omega^2A\sin(\omega t+\delta)$となり，左辺と右辺が等しいことが示された．

Q6: 君は新米の花火職人だ．親方から，「500m 上がって，最高点で爆発する花火を作れ」と言われた．重力加速度の大きさをを 9.8m/s^2 として以下の問いに答えよ．

(1) 打ち上げの初速はどれほどにすれば良いか．右の v-t グラフを使い答えよ(10).

v-t グラフの面積が，打ち上げ後に上がる高さ．t 軸との交点で v=0 だから，ここが最高点．傾きが−9.8 であることに注意．

$$S=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{9.8}=500\rightarrow v_0=99\,\mathrm{m/s}$$



(2) 打ち上げ後，何秒で爆発するように仕掛ければ良いか(10).

t 軸との交点を求める．$t_0=\dfrac{99}{9.8}=10\rightarrow t_0=10\,\mathrm{s}$