線形 2 階微分方程式

18/11/26 遠藤雅守

我々は質点の運動に興味があるので, 解くべき微分方程式は, 典型的には

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx+F\left(t\right) \tag{1}$$

m	質量
γ	抵抗係数
k	ばね定数
$F(t)$	外力

と表される. とする. 話を一般化するため, $\kappa=\dfrac{\gamma}{m}$, $\omega_0{}^2=\dfrac{k}{m}$, $f=\dfrac{F}{m}$と置き換えて,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\kappa\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0{}^2x=f\left(t\right) \tag{2}$$

と書く. まず, 斉次形の一般解を求めよう. 特性方程式は

$$\lambda^2+2\kappa\lambda+\omega_0{}^2=0 \tag{3}$$

で, λ は根の公式を使って

$$\lambda_1=-\kappa+\sqrt{\kappa^2-\omega_0{}^2}\ ,\ \lambda_2=-\kappa-\sqrt{\kappa^2-\omega_0{}^2} \tag{4}$$

である. あとは, 原則的に

$$x\left(t\right)=C_1e^{\lambda 1t}+C_2e^{\lambda 2t}\qquad (C_1,\ C_2\text{ は任意の定数}) \tag{5}$$

とやってしまえば終わりであるが, $\kappa^2-\omega_0{}^2$ がゼロにも, 負にもなりうる点に注意が必要だ. そこで, $\kappa^2-\omega_0{}^2$ の符号に応じて解法を分ける.

1. $\kappa^2-\omega_0{}^2>0$

解は素直に

$$x\left(t\right)=C_1e^{\lambda 1t}+C_2e^{\lambda 2t}\qquad (C_1,\ C_2\text{ は任意の定数}) \tag{6}$$

と表される. すなわち, 2 つの負の指数関数の和となる.

2. $\kappa^2-\omega_0{}^2=0$

このときは, 指数関数が同じになってしまうので, C_1 と C_2 が合体してしまい, 任意定数が一つになってしまう(C_1+C_2 も任意の定数なので, これは一つの任意定数). そこで, もう一つの任意定数を含む解を見つけなければならない. 詳しい説明は省くが,

$$x\left(t\right)=\left(C_1+C_2t\right)e^{\lambda t}\qquad (C_1,\ C_2\text{ は任意の定数}) \tag{7}$$

が常にうまくいくことが知られている. ここで, $\kappa^2-\omega_0{}^2=0$ なので, $\lambda=-\kappa$ である.

3.　$\kappa^2 - {\omega_0}^2 < 0$

　このとき，平方根の中が負になるので，λ_1，λ_2 は複素数となる．それでも恐れずに進もう．

$$\lambda_1 = -\kappa + i\sqrt{{\omega_0}^2 - \kappa^2}\ ,\ \ \lambda_2 = -\kappa - i\sqrt{{\omega_0}^2 - \kappa^2} \tag{8}$$

を，$\omega_1 = \sqrt{{\omega_0}^2 - \kappa^2}$ と置き換え，

$$\lambda_1 = -\kappa + i\omega_1\ ,\ \ \lambda_2 = -\kappa - i\omega_1 \tag{9}$$

として先を続けると，

$$x(t) = e^{-\kappa t}\left(C_1 e^{i\omega 1t} + C_2 e^{-i\omega 1t}\right) \qquad (C_1,\ C_2\ \text{は任意の定数}) \tag{10}$$

を得る．オイラーの公式を使えば，後半の部分は三角関数に書き換えることができて，

$$x(t) = e^{-\kappa t}\left\{A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)\right\} \qquad (A,\ B\ \text{は任意の定数}) \tag{11}$$

と書ける．C_1，C_2 と A，B の関係を求めることは可能だが，これは不要だ．どうせ，A，B は初期条件が与えられれば直接知ることができる．すなわち，$\kappa^2 - {\omega_0}^2 < 0$ のとき，斉次形の一般解は指数関数と調和振動の和となり，これは減衰振動と呼ばれる．

次に，非斉次形の一般解を求める．これは，非斉次形の特殊解をひとつ見つけ，これを斉次形の一般解に足せばよい．例として，$f(t) = \sin(\omega t)$ の場合を考える．ここで，ω は任意の角振動数で，ω_0 とも，$\omega_1 = \sqrt{{\omega_0}^2 - \kappa^2}$ とも無関係に決められることに注意すべきである．

　まず，$f(t) = \sin\omega t$ なら，特殊解も角振動数 ω で振動する調和振動だろう，とアタリをつける．この「アタリ」は，何度か経験すればわかるようになる．ただし，振幅と位相は不明なので，解を

$$x(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) \qquad (\alpha,\ \beta\ \text{はある定数}) \tag{12}$$

と置こう．微分方程式が $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\kappa\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = f(t)$ を満足するということは，

$$\left(-\alpha\omega^2 + 2\kappa\beta\omega + \alpha{\omega_0}^2\right)\cos(\omega t) + \left(-\beta\omega^2 - 2\kappa\alpha\omega + \beta{\omega_0}^2\right)\sin(\omega t) = \sin(\omega t) \tag{13}$$

が満足されなければならない．したがって，

$$-\alpha\omega^2 + 2\kappa\beta\omega + \alpha{\omega_0}^2 = 0 \tag{14}$$

$$-\beta\omega^2 - 2\kappa\alpha\omega + \beta{\omega_0}^2 = 1 \tag{15}$$

が成り立ち，これは α，β についての連立方程式になる．解くと

$$\alpha = \frac{2\kappa\omega}{4\kappa^2\omega^2 - ({\omega_0}^2 - \omega^2)^2}\ ,\ \ \beta = \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{4\kappa^2\omega^2 - ({\omega_0}^2 - \omega^2)^2} \tag{16}$$

を得る．したがって，微分方程式式(1)の一般解は以下の通りである．

$$x(t) = e^{-\kappa t}\left\{A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)\right\} + \frac{2\kappa\omega\cos(\omega t)}{4\kappa^2\omega^2 - ({\omega_0}^2 - \omega^2)^2} + \frac{(\omega^2 - {\omega_0}^2)\sin(\omega t)}{4\kappa^2\omega^2 - ({\omega_0}^2 - \omega^2)^2} \tag{17}$$

$(A,\ B$ は任意の定数$)$