線形微分方程式の一般的解法

17/05/15 遠藤雅守

問題を,「時刻 t の関数で表される x, すなわち $x(t)$の微分方程式」に限定する. 微分方程式の定義は,「x, x の導関数, t の関数 $f(t)$を等号で結んだもの」である. 次に, 微分方程式を解くとはどういうことかというと, それは「前述の等式を満足する $x(t)$を見出すこと」である.

次に, 微分方程式を 2 つの基準で分類する. 一つは「線形・非線形」で, もう一つは「斉次・非斉次」である. 線形微分方程式とは, 方程式が x とその導関数, $f(t)$のみからなるもので, x^2 や $\sin(x)$など, x を引数とする関数を含まないものである. 一方の非線形微分方程式はそれらを含む. 斉次微分方程式は t の関数 $f(t)$を含まず, 非斉次微分方程式はそれを含む. これらの分類により, 微分方程式は 4 種類に分かれる. いま, $f(t)$として $\sin(\omega t)$を例にとってまとめてみよう.

微分方程式の分類

	斉次	非斉次
線形	$a_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = 0$	$a_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = \sin(\omega t)$
非線形	$a_1 \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + a_0 x = 0$	$a_1 \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + a_0 x = \sin(\omega t)$

※a_0, a_1, a_2, ωは定数

線形斉次微分方程式の解は決まっている. 一般に, n 階の線形斉次微分方程式を以下のように表せば,

$$a_n \frac{\mathrm{d}^{(n)} x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = 0 \tag{1}$$

ただし a_0, a_1, …a_n は定数

その解は以下の様に表されることが知られている.

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} \tag{2}$$

λ_1, λ_2…λ_n は以下で定義される「特性方程式」の根である.

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{3}$$

特性方程式は n 次方程式で, 複素数の範囲まで含めれば必ず n 個の解が存在する. それを端からλ_1, λ_2…λ_n と名づけ, 式(2)に代入すれば微分方程式は解ける[1].

具体的にやってみよう. 微分方程式を

[1] 重根が存在する場合は例外となる. 詳しくは微分方程式の教科書を参照のこと.

$$m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\gamma x=0 \tag{4}$$

とする．すると，特性方程式は

$$m\lambda+\gamma=0 \tag{5}$$

で，直ちに唯一の根が $\lambda_1=-\frac{\gamma}{m}$ とわかる．したがって，式(4)の解は

$$x(t)=C\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) \qquad (C\text{ は定数}) \tag{6}$$

である．念のため，式(6)を式(4)に代入し，解であることを確認しよう．

式(6)は，式(4)を満たすあらゆる方程式を含む．これを微分方程式の「一般解」と言う．一方，微分方程式を

$$m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\gamma x=-mg \tag{7}$$

としたとき，$x(t)=-\frac{mg}{\gamma}$ は，やはり微分方程式の解である．$-\frac{mg}{\gamma}$ は定数だから微分するとゼロで，確かにこれは式(7)を満たす．しかし，これは，式(7)を満足するあらゆる解を含まない．これを微分方程式の「特殊解」という．そして，**線形非斉次微分方程式の一般解は，「斉次形の一般解と非斉次形の特殊解を足す」ことで得られる**ことが知られている．ちょうど，式(7)の斉次形が式(6)だから，式(7)の一般解は以下のように表される．

$$x(t)=C\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)-\frac{mg}{\gamma} \qquad (C\text{ は定数}) \tag{8}$$

微分方程式の解が正しいかどうかを確認するのは比較的易しい作業だから，これも確認しておこう．

非斉次形の特殊解を見出す作業は，右辺の $f(t)$ が単純な関数なら易しいが，複雑な関数の場合はちょっとしたコツが有る．例として以下の問題を試してみよう．

問題： $\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=\sin(\omega t)$ の特解を求めよ．

解答： $x(t)=\frac{1}{2}\left\{\sin(\omega t)-\cos(\omega t)\right\}$

解説： 特解は，$\sin(\omega t)$ と $\cos(\omega t)$ を含む何らかの関数であろう，ということは見当がつくが，当てずっぽうにやってもまず無理．解を $C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t)$ と仮定して，微分方程式を満足する C_1，C_2 を求める．ついでに，問題で与えられた微分方程式の一般解は，斉次系の一般解を足して，

$$x(t)=Ce^{-\omega t}+\frac{1}{2}\left\{\sin(\omega t)-\cos(\omega t)\right\} \qquad (C\text{ は定数}) \tag{9}$$

である．代入して確認すること．