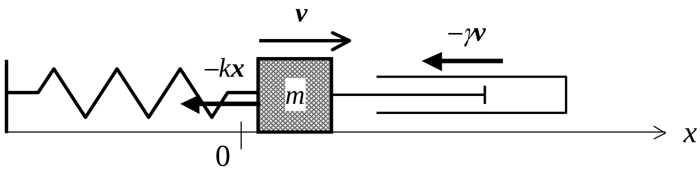
力学演習　今日の One point

第 11 回講義



- ばね，おもり，速度に比例する抵抗(ダンパー)が右図のように組み合わされた系の振動を考える．運動方程式は，素直に書けば

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \tag{1}$$

だが，これを以下のように書き直す.

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \tag{2}$$

ここで，$2\kappa = \gamma / m$，$\omega_0{}^2 = k / m$ と置き換えたことに注意．(2)式は「2 階線形斉次微分方程式」で，解き方は正式には「物理数学 2」の講義で習う.

- ここでは，手順のみを簡単に説明する．まず，(2)式に対応した「特性方程式」を立てる．これは，x の n 階微分を λ^n に置き換えたものである.

$$\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega_0{}^2 = 0 \tag{3}$$

- 次に，この方程式の根を求める．(3)の根は二次方程式の根の公式を使い，$\lambda_1 = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0{}^2}$ と $\lambda_2 = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0{}^2}$ である.
- 最後に，式(2)の微分方程式の一般解は

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意の定数}) \tag{4}$$

で与えられる．つまり，2 階線形斉次微分方程式は，二次方程式を解く程度の労力で解ける.

- 平方根の中身，$\kappa^2 - \omega_0{}^2$ の符号によって運動は様相を変える.

(ア) $\kappa^2 - \omega_0{}^2 > 0$：運動は単調な減衰で原点に近づく．これを「過減衰」と呼ぶ．ドアがゆっくり閉じる仕組み(ドアクローザー)がこの領域である.

(イ) $\kappa^2 - \omega_0{}^2 = 0$：$\lambda_1$ と λ_2 が重根になるため，解は式(4)の形にならない．解き方は省略するが，解は $x = (C_1 + C_2 t)\exp(-\kappa t)$ (C_1，C_2 は任意の定数)となることが知られている．この解は「臨界減衰」と呼ばれ，x が速やかにゼロに近づくことから，自動車のサスペンションに応用されている.

(ウ) $\kappa^2 - \omega_0{}^2 < 0$：平方根の中が負になるので，$\lambda_1$ と λ_2 は共役複素数である．このときは，オイラーの公式 $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$，$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$ を使えば，

$$x = \left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]e^{-\kappa t} \qquad (A,\ B \text{ は任意の定数}) \tag{5}$$

と書ける．この解は「減衰振動」と呼ばれ，代表的なものは緩やかに振幅を減らしながら振動する振り子の運動などである.