| ２０１７年度　　秋学期　期末試験模試 | | | | 問題枚数 | 1／1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 科　　目　　名 | 出　題　者　氏　名 | 受　験　ク　ラ　ス | 学　生　証　番　号 | 氏 | 名 |
| 力学演習 | 遠藤　雅守 | | | | |
| 持　込　　可 | ◇可の場合は記入 教科書・ノート | 開講曜日・時限 木曜　　3 限 | 現在使用している授業教室 | 6A－101 | 採点 |

特に断りのない限り重力加速度の大きさには $g$ を使用せよ．

Q1: 空気抵抗が無視できる落下運動を解析する．鉛直上向きに $y$ 軸を取り，質量 $m$ の物体は $y=y_0$ にいる．時刻ゼロで，物体を初速度 $v_0$ で投げ上げた．

(1) 運動方程式を立てなさい(5).

答：$\boxed{m\ddot{y}=-mg}$

(2) 運動を決定しなさい(10).

答：$\boxed{y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0}$

Q2: 速度に比例する抵抗を受けながら落下する質量 $m$ の物体の運動を解析する．鉛直上向きに $y$ 軸を取り，抵抗力は抵抗係数 $\gamma$ と物体の速度 $v$ の積である．

(1) $v$ に関する運動方程式を立てなさい (5).

答：$\boxed{m\dot{v}=-mg-\gamma v}$

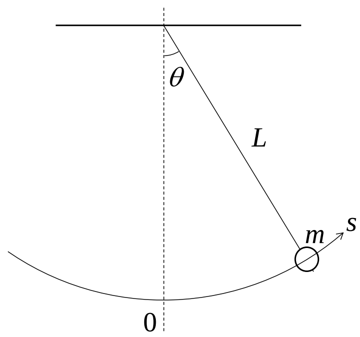
(2) $t$=0 で，物体を初速度 $v_0$ で投げ上げたとする．$v(t)$を定めよ(10).

同次形の一般解は $v(t)=Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}$． 特解は $v(t)=-\frac{mg}{\gamma}$． 足して，一般解は $v(t)=Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}-\frac{mg}{\gamma}$．　($C$ は積分定数).

初期条件は $v(0)=v_0$． $C=\frac{mg}{\gamma}+v_0$．

答：$\boxed{\left(\frac{mg}{\gamma}+v_0\right)e^{-\frac{\gamma}{m}t}-\frac{mg}{\gamma}}$

Q3: おもりの質量が $m$，長さ $l$ の単振り子について考える．




(1) 図のように，運動を表す変数をおもりの軌道に沿った位置 $s$ とする(真下を原点とする)．$s$ に関する運動方程式を立てなさい．振り子の振り角は小さいとして，sin$\theta$～$\theta$ の近似を適用せよ(5).

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\left(\frac{s}{l}\right)\approx -mg\frac{s}{l}$$

(2) 振り子の周期を求めよ(5).

固有角振動数が $\omega=\sqrt{\frac{s}{l}}$ で，周期は $T=\frac{2\pi}{\omega}$．

答：$\boxed{m\ddot{s}=-mg\frac{s}{l}}$

答：$\boxed{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

(3) $t$=0 で，おもりを叩いて水平に $I$[Ns]の力積を与えた．振り子の運動 $\theta(t)$を定めよ．振り子の固有角振動数を $\omega$ とせよ(10).

運動方程式は単振動で，解は $s=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ ($A$，$B$ は任意定数)．$t$=0 で $s=0$，$\dot{s}=\frac{I}{m}$ という初期条件を代入すれば $A$ と $B$ が決定できる．両辺を $l$ で割り，$\theta(t)$で表す．

答：$\boxed{\theta=\frac{I}{ml\omega}\sin(\omega t)}$

Q4: 質量 $m_1$ のおもりと 1 質量 $m_2$ のおもり 2 がばねで結ばれ，摩擦のない水平面上で回転している．ばねの自然長は $l$，ばね定数は $k$ である．

(1) おもり 1 から見たおもり 2 の位置をベクトルを $\boldsymbol{R}$ とする．$\boldsymbol{R}$ の運動方程式を書きなさい．換算質量を $\mu$ とせよ(10).

相対運動の運動方程式は考えるより憶える．$\mu\ddot{\boldsymbol{R}} = F(R)\boldsymbol{e}_R$ で，ここで $F(R)=-k(R-l)$である．

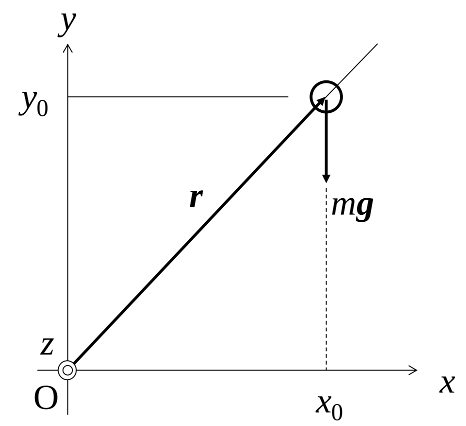
答：$\boxed{\mu\ddot{\mathbf{R}} = -k(R-l)\boldsymbol{e}_R}$

(2) $R$ がで一定であるとき，おもりの回転周期を求めよ(10).

ばねの反発力が円運動の向心力になっていると考える．$a_R = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{k(R-l)}{\mu}$．v について解き，$T = \dfrac{2\pi R}{v}$ で周期を求める．

答：$\boxed{2\pi\sqrt{\dfrac{\mu R}{k(R-l)}}}$

Q5: 自由落下を，原点を中心とした角運動量の立場で観測する．図のように，質量 $m$ の物体を $(x_0, y_0, 0)$ から $t$=0 で静かに離す．




(1) 重力のモーメントをデカルト座標で成分表示せよ(10).

力のモーメントは $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ で，方向は−z，大きさは $rmg\sin\theta$．ところが，$r\sin\theta=x_0$ なので，大きさは $-mgx_0$ と書ける．

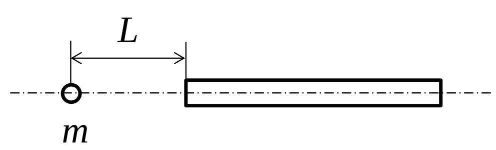
答：$\boxed{(0,\ 0,\ -mgx_0)}$

(2) 物体の角運動量をデカルト座標で成分表示せよ(10).

$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N}$ を使う．角運動量も力のモーメントも z 成分のみなのでスカラーで扱う．$\dot{L} = -mg\sin x_0$ を解き，$L = -mg\sin x_0 t + C$．初期条件は，時刻ゼロで $L$=0 だから，$L = -mg\sin x_0 t$

答：$\boxed{(0,\ 0,\ -mgx_0 t)}$

Q6: 図のような配置で，密度 $\rho$，断面積 $S$，長さ $2L$ の細い棒と質量 $m$ の質点が互いに及ぼす万有引力の大きさが $\dfrac{2Gm\rho S}{3L}$ であることを証明せよ(10).




質点を原点に，右に $x$ 軸をとる．棒の，長さ d$x$ の部分と $m$ の間の万有引力は $\dfrac{Gm\rho S\mathrm{d}x}{x^2}$ で，これを $x=L$ から $x=3L$ まで定積分すればよい．

$$F = \int_L^{3L} \frac{Gm\rho S\mathrm{d}x}{x^2} = G\rho m S\left[-\frac{1}{x}\right]_L^{3L} = \frac{2Gm\rho S}{3L}$$