学籍番号　氏名　得点

Q1: 以下の空欄を埋めなさい(5×4=20).

ニュートンは，ケプラーの法則から，太陽と惑星の間に働く力が惑星の＿質量＿に比例し，太陽と惑星の＿距離の 2 乗＿に反比例することに気づいた．惑星-太陽間の力が惑星だけの質量で決まる，とは考えにくい．力は惑星の質量 m と太陽の質量 M の積に比例するはずだ．したがって力の大きさは定数を G として＿$G\dfrac{Mm}{r^2}$＿(数式)と書けるはずである．更に，面積速度一定の法則を考えれば, 力は＿中心力＿でなくてはならない. こうして, 万有引力の法則が導かれた.

Q2. 二次元座標系における速度，加速度の極座標形式についての問に答えよ．解答で使って良い記号は r，φ およびそれらの時間微分($\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$)と単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r\ \boldsymbol{e}_\varphi$ のみとする.

(1) $\boldsymbol{r}$ ベクトルを単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ を使い $r\boldsymbol{e}_r$ と表した． $\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$ を問に指定された記号で表しなさい(10).

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\boldsymbol{e}_r\right) = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

(2) 極座標の単位ベクトルを微分するとゼロにならない理由を説明しなさい(10).

極座標では単位ベクトルは定ベクトルではなく時間の関数で変化するから.

(3) 加速度 $\boldsymbol{a} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ を問に指定された記号で表しなさい(10).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right) = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}\\ &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\left(\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right) + \dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\left(-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r\right)\\ &= \left\{\ddot{r} - r\left(\dot{\varphi}\right)^2\right\}\boldsymbol{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

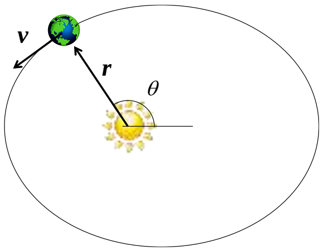
Q3 定められた平面内を運動する質点の角運動の大きさを質点の質量 m，位置(r, φ)およびその微分で表わせ(10). ヒント: $\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{v}$ を極座標で成分表示.

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = m\left(r\boldsymbol{e}_r\times\left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)\right) = mr^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

方向は面に垂直.

Q4: 右図の様に，恒星の周囲をまわる質量 m の惑星の運動を考える．以下の各問に答えよ.



(1) 万有引力を $F_r\boldsymbol{e}_r$ として，極座標の運動方程式を立てなさい(10).

$$r\text{成分}: m\left\{\ddot{r} - r\left(\dot{\varphi}\right)^2\right\} = F_r$$

$$\varphi\text{成分}: m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = 0$$

(2) 惑星が一定の半径の円軌道を描くとき，その角速度 $\dot{\varphi}$ は一定でなくてはならないことを示せ(10).

$m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = 0$ に r 一定の条件を課せば $\ddot{\varphi} = 0$．ここから $\dot{\varphi} = 0$ とわかる.

(3) 教科書 p119 を見て，(1)の $\boldsymbol{e}_\varphi$ 成分が「面積速度一定の法則」を表していることを示せ(10).

運動方程式の $\boldsymbol{e}_\varphi$ 成分は $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0$ と書ける．一方，Q3 から，惑星の角運動量の大きさは $mr^2\dot{\varphi}$ と書けるから，この運動は角運動量が変化しない．面積速度は $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\left|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right|$ だから，角運動量が変化しない運動は面積速度も一定である.

Q5:質量 M の恒星の回りで運動する，任意の質量の惑星について，極座標の運動方程式 $-G\dfrac{M}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ が成り立つことがわかる．惑星が半径 R の円運動をしているとき，惑星の公転周期を求めよ(10).

円運動は $\ddot{r} = 0$ だから，r に R を代入して $G\dfrac{M}{R^2} = R\dot{\varphi}^2$ を得る．整理して，周期 $T = \dfrac{2\pi}{\dot{\varphi}}$ を求めると

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$