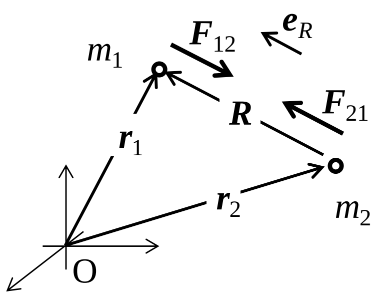
学籍番号　　　　　氏名　　　　　　　　　得点

Q1: 以下の空欄を埋めなさい(5×4=20).

対象となる物体が 2 個で，それらが相互に及ぼす力以外の力が無い問題を＿＿2 体問題＿＿(A)と呼ぶ．(A)は，以下の方法で比較的容易に解析できる．2 体の質量を m_1，m_2，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ とする．1 方の物体を原点に取り，もう一方の物体の運動 $\boldsymbol{R}(t)=$＿＿$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$＿＿(数式)を考えることにする．すると，運動方程式は，＿＿内力 or 中心力＿＿により運動する質量＿＿$\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$＿＿(数式)の物体の運動と考えて良いことが示される．

Q2: 互いに万有引力を及ぼしあい，三次元空間で運動する質点 m_1，m_2 がある．以下の問に答えなさい．以降，ベクトル $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_1$-$\boldsymbol{r}_2$ の大きさを R，$\boldsymbol{R}$ 方向の単位ベクトル $\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}$ を $\boldsymbol{e}_R$ と表記する．



(1) 万有引力定数を G として，m_1 が m_2 から受ける力，$\boldsymbol{F}_{12}$ を答えよ(10).

$\boldsymbol{F}_{12}=-G\dfrac{m_1m_2}{R^2}\boldsymbol{e}_R$．マイナスの符号に注意.

(2) (1)の解を利用し，m_1，m_2 の運動動方程式をそれぞれ書きなさい(5×2).

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2}=-G\frac{m_1m_2}{R^2}\boldsymbol{e}_R \qquad m_2\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2}=G\frac{m_1m_2}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

(3) 換算質量 μ を使い，$\boldsymbol{R}$ が従う運動方程式を求めなさい(10).

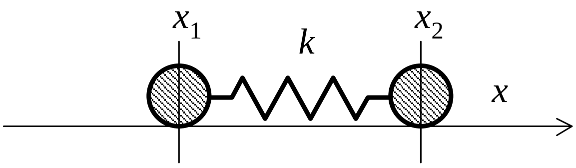
$$\mu\ddot{\boldsymbol{R}}=-G\frac{m_1m_2}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

(4) m_2 の周りを m_1 が等速円運動する場合の回転周期を求めなさい(10).

$-G\dfrac{m_1m_2}{R^2}$ が向心力の大きさ．これを等速円運動の公式 $F_R=\mu\dfrac{v^2}{R}$，$T=\dfrac{2\pi R}{v}$ に代入すれば回転周期は

$2\pi\sqrt{\dfrac{\mu R^3}{Gm_1m_2}}$．$\mu$ を展開し，$2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{G(m_1+m_2)}}$ でも良い．

Q3: 水平で摩擦のない床の上に質量m_1のおもり1と質量m_2のおもり2がばね定数kのばねでつながれており，x軸上を運動する．ばねの自然長はL，ばね定数はkである．以下の問に答えよ．



(1) おもり1の座標をx_1，おもり2の座標をx_2として，それぞれのおもりの運動方程式を立てなさい(5×2).

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = k(x_2 - x_1 - L)$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k(x_2 - x_1 - L)$$ 一度やった問題．憶えていたかな？

(2) 質量中心の座標x_Gを求めよ(10).

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

(3) おもり1から見たおもり2の相対運動，$x_2 - x_1 = X$の運動方程式を立てなさい．ここで，換算質量μを使い解答すること(10)．※ヒント：教科書p110.

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1} k(x_2 - x_1 - L)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{m_2} k(x_2 - x_1 - L)$$

$$\ddot{X} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) k(x_2 - x_1 - L)$$

$$\mu \ddot{X} = -k(X - L)$$

(4) はじめ，ばねは自然長でおもり1，2は静止していた．時刻ゼロで左からおもり1と同じおもりを速度vで衝突させた．衝突は弾性衝突である．$X(t)$の初期条件，$X(0)$と$\dot{X}(0)$を決定せよ(5×2).

時刻ゼロでXはいくらか，そしてその後何が起こるかを考える．時刻ゼロで$X = L$は明らか．おもりが衝突することにより，m_1は速度vで右に動く(速度交換)．一方，m_2はばねが自然長だから動かない．定義から，$\dot{X} = -v$である．

ちなみに，運動は$X(t) = -\sqrt{\frac{\mu}{k}} v \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} t\right) + L$.