学籍番号　　　氏名　　　得点

Q1: 以下の空欄を埋めなさい(5×4=20).

物体の運動を記述するためには，運動方程式があれば充分であることは間違いない．しかし，ある種の運動は，新しい物理量を導入することでよりわかりやすく記述できる．質点の運動量を $\boldsymbol{p}$，質点に働く力を $\boldsymbol{F}$ とするとき，運動方程式は $\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{F}$ と書ける．いま，質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ としたとき，$\boldsymbol{L}$= $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ を「角運動量」，$\boldsymbol{N}$= $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ を「力のモーメント」と定義する．すると，運動方程式は $\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{N}$ (数式)と変形できることが示せる．この形は，物体が回転運動するような問題の解析に威力を発揮する．

Q2: 以下のステップで，$\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{N}$ を証明せよ(5×4=20).

(1) ニュートンの運動方程式，$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}$ を，$\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{F}$ と書き直す．両辺に左から $\boldsymbol{r}$ ベクトルを外積すると，

$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ を得る．

(2) 右辺は，定義から 力のモーメント (文章)ベクトルである．一方の左辺は，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ なる物理量の時間微分を考える．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})$ を，積の微分公式を使って展開すると，

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\dot{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$ となる．ここで，$\dot{\boldsymbol{r}}$ と $\boldsymbol{p}$ は常に平行だから，$\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p}$ はゼロである．したがって，$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})$ なる関係があることがわかる．角運動量の定義より $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ だから，題意が示された．

Q3: 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(1,2,-1)$ [m]にあり，質量 2 kg，速度ベクトル $\boldsymbol{v}=(1,-3,2)$ [m/s]を持つ質点がある．以下の問いに答えよ．

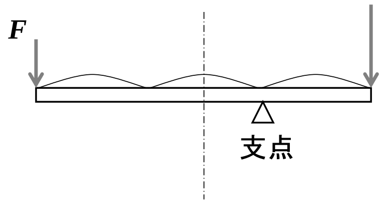
(1) 質点の角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ を求めよ(10). **※単位を忘れないこと**

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -6 & 4\end{vmatrix}=(2,-6,-10)\quad[\mathrm{kgm^2/s}]$$

(2) この質点に $\boldsymbol{F}=(1,5,1)$ [N]の力を加えた．質点に働く力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を求めよ(10).

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=(7,-2,3)\ \ [\mathrm{Nm}]$$

Q4: 図の様な長さ L のシーソーのつり合いを考える. 支点は棒の長さの 1/3 の位置にある．棒は軽く，棒と支点の間の摩擦は無視できる．

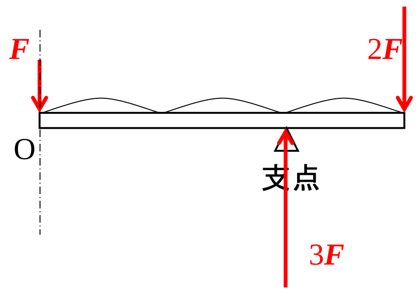


(1) 左端を大きさ F の力で垂直に押したとき，つりあいを保つため右端に垂直に加える力の大きさを答えよ(10).

支点を原点としてモーメントのつり合いを求める. 右端の力を F_{r} とすれば,

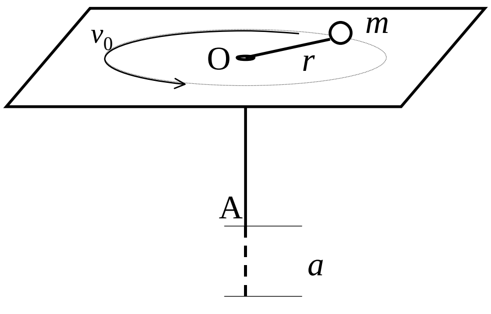
$-\left(\frac{2}{3}L\cdot F\right)=\frac{1}{3}LF_{\mathrm{r}}$．$F_{\mathrm{r}}$ について解き，$F_{\mathrm{r}}=2F$．もちろん，こんな事をしなくても，我々は日常的な感覚で右端の力が $2F$ であることを知っている．

(2) **角運動量保存則は原点をどこに定めても成立する**. 上図の状態でシーソーが釣り合っているとき，原点をシーソーの右端にとり，シーソーに働く力のモーメントの和を求めよ．モーメントはスカラ量で考え，右回りを正とする(10).



右端を原点にとれば, 右端にかかる力のモーメントは考えなくともよい. 一方,「支点に働く力」がモーメントを持つことに注意せよ．力の大きさは(1)の解を使えば $3F$ で，モーメントは $\left(\frac{1}{3}L\cdot 3F\right)=LF$．左端の力のモーメントは $-LF$ なので，足せばゼロになる．

Q5: 水平に固定されたなめらかな板の中心に開けられた小さい穴 O に糸を通し，質量 m の小球 P を付ける．



(1) 糸の他端 A を持ち，糸を張ったまま小球に初速 v_0 を与え，板上で半径 r，反時計回りの等速円運動をさせた．糸の角運動量ベクトルの向きと大きさを求めよ(5×2=10).

$L=|\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}_0|=rmv_0$．方向は面に対して上向き．

(2) 次に，ひもを距離 $a(<r)$だけゆっくり引き下げた．その後の小球の円運動の速さを求めよ(10).

おもりは中心力で引かれるので角運動量は保存される．$rmv_0=(r-a)mv$ を変形,

$$v=\frac{r}{(r-a)}v_0$$