学籍番号　　　　　　氏名　　　　　　　　　　　　　　　　得点

Q1: 以下の空欄を埋めなさい(5×4=20).

物体の運動を記述するためには，運動方程式があれば十分であることは間違いない．しかし，ある種の運動は，新しい物理量を導入することでよりわかりやすく記述できる．質量 m の質点の変位を $\boldsymbol{r}$，質点に働く力を $\boldsymbol{F}$ とするとき，運動方程式は $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ と書ける．いま，$\boldsymbol{L}$= $\boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}$ を「角運動量」，$\boldsymbol{N}$= $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ を「力のモーメント」と定義する(文章内の記号で記述せよ)．すると，運動方程式は $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N}$ (数式)と変形できることが示せる．これは，「力のモーメントが働かない限り角運動量は変化しない」ことを意味し，中心力のみが働く運動の解析で絶大な威力を発揮する．

Q2: 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (1, 2, -1)$ [m]にあり，質量 1 kg，速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (1, -3, 2)$ [m/s]を持つ質点がある．以下の問いに答えよ．

(1) 質点の角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ を求めよ(10)．**※単位を忘れないこと**

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (1, -3, -5) \ \ [\mathrm{kgm^2/s}]$$

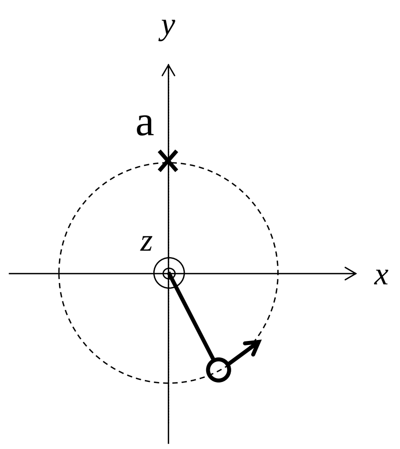
(2) この質点に $\boldsymbol{F} = (1, 5, 1)$ [N]の力を加えた．質点に働く力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を求めよ(10).

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (7, -2, 3) \ \ [\mathrm{Nm}]$$

(3) 力を加えた結果，角運動量の大きさは増加するか，減少するか．根拠とともに示しなさい(10).

角運動量の変化率がモーメント．これが，角運動量と同じ方向なら大きさは増加，逆方向なら減少する．その判断は，角運動量とモーメントの内積を取り，符号を見れば良い．$(1, 2, -1) \cdot (7, -2, 3) = -2$．角運動量の大きさは減少する．

Q3: 図の様に，一端を固定した長さ l の軽いひもの先に質量 m の小球をつけ，一定の角速度 ω で水平なテーブル上を回転させる．ひもの一端を原点，テーブルを$(x$-$y)$平面として以下の問に答えよ．



(1) 小球の角運動量をデカルト座標で成分表示せよ(10).

$\boldsymbol{L} = \left(0, 0, ml^2\omega\right)$

(2) 小球が図 a の位置にあったとき，突然ひもが切れた．その後の小球の運動 $\boldsymbol{r}(t)$をデカルト座標で成分表示せよ．ひもが切れた瞬間を t=0 とする(10).

$\boldsymbol{r}(t) = \left(-l\omega t, l, 0\right)$

(3) ひもが切れた後の小球の運動量，角運動量をそれぞれデカルト座標で成分表示せよ(5×2=10).

ヒント：ひもが切れた後は小球に力(のモーメント)が働かないので，角運動量は保存する.

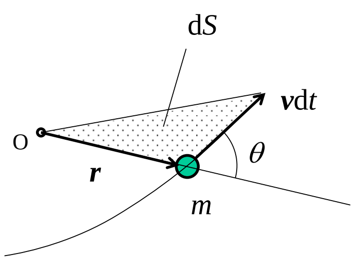
$\boldsymbol{r}(t)$ を時間で 1 階微分， $\boldsymbol{v}(t) = \left(-l\omega, 0, 0\right)$ を得る．

運動量　：$m\boldsymbol{v} = \left(-ml\omega, 0, 0\right)$

角運動量：$\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \left(-l\omega t, l, 0\right) \times \left(-ml\omega, 0, 0\right) = \left(0, 0, ml^2\omega\right)$

角運動量保存則から，ひもが切れた後の角運動量も，ひもが切れる前と同じ値を保つ．

Q4: O 点に恒星があり，質量 m の惑星が恒星の周りを公転している．



(1)「面積速度一定」とは，単位時間あたりに惑星が掃く面積 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ と定義される．これを惑星の角運動量で表わせ(10). ※絶対値記号を忘れないこと.

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\left|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\right|\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\right| = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$

(2) 惑星の運動は面積速度が一定であることを文章で示せ(10).

万有引力は中心力だから力のモーメントはゼロである．したがって，角運動量は保存され，面積速度も変化しない．