

学籍番号 _____ 氏名 _____ 得点 _____

Q1: 以下の空欄を埋めなさい(5×10=50).

下図のような、ばねとおもりとダンパーからなる系は、2階・斉次・線形微分方程式

で表される問題の典型である．一般にこれは $\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (a)の形に書かれる．(a)の一般解を求める

ための 特性方程式 (文章)は次の形に書ける． $\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega_0^2 = 0$ ．根は

$\lambda_1 =$ $-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$, $\lambda_2 =$ $-\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$ になる．すると微分方程式の解は、 λ_1 と λ_2 を

使って $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ (C_1, C_2 は定数)と書けることが知られている．注意すべきは、 λ_1 と

λ_2 は $\kappa^2 - \omega_0^2$ (b)の符号により正の実数、ゼロ、複素数を取りうる点で、それぞれの場合

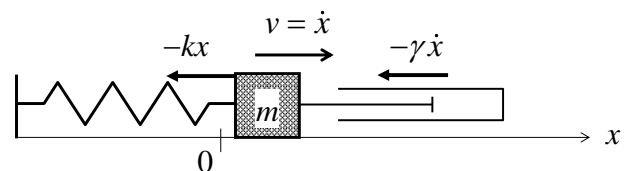
で運動は全く異なる様子を示す．(b)>0 のとき運動は 過減衰 (文章) , (b)=0 のときは臨界

減衰, (b)<0 のときは 減衰振動 (文章)となる．(b)<0 のとき、解は複素数の指数を含むが、オ

イラーの公式を使えばこれは $x(t) =$ $e^{-\kappa t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ (A, B は任意の定数)と書ける．

ただし $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$ である．

Q2: ばね定数 k のばねにつながれた質量 m のおもりに、速度に比例する抵抗力が働く一次元の運動を考える．バネの自然長からの伸びを x , 粘性抵抗力を $-\gamma\dot{x}$ (γ は正の比例定数)とする．



(1) 以降の計算を容易にするため、運動方程式を $\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ と書き直す． κ, ω_0 を図に示された量で表わせ(5×2=10).

$$\kappa = \frac{\gamma}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(2) 特性方程式(2次方程式)を立て、その根を求めよ(10).

特性方程式は $\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega_0^2 = 0$ で、根の公式を使い $\lambda = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$.

(3) $\omega_0^2 = \frac{3}{4}\kappa^2$ の場合の運動方程式の一般解を、 κ を使い示しなさい。積分定数を C_1, C_2 とすること(10).

$\lambda_1 = -\frac{\kappa}{2}, \lambda_2 = -\frac{3\kappa}{2}$ だから、 $x(t) = C_1 e^{-\kappa t/2} + C_2 e^{-3\kappa t/2}$.

(4) $\kappa^2 - \omega_0^2 < 0$ の場合、特性方程式の根は2つの共役複素数となる。いま、これを $\lambda_1 = -\kappa + i\beta, \lambda_2 = -\kappa - i\beta$ と置く。運動方程式の一般解を、指数関数を使って表わせ。積分定数を C_1, C_2 とすること(10).

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-\kappa t + i\beta t} + C_2 e^{-\kappa t - i\beta t} \\ &= e^{-\kappa t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}) \end{aligned}$$

(5) $\omega_0^2 \gg \kappa^2$ のとき、初期条件を適切に選ぶと系の運動は $x = X_0 e^{-\kappa t} \cos(\omega_0 t)$ (X_0 は任意の定数) で表される緩やかな減衰振動となる。運動のおよその形が分かるグラフを右に描きなさい t 軸上、 \times 点を通るように描くこと。(10).

およそ右図のとおり。正解のポイントは

(1) $t=0$ で $x=X_0$

(2) 周期が一定であること

満たされていない場合それぞれ5点減点.

