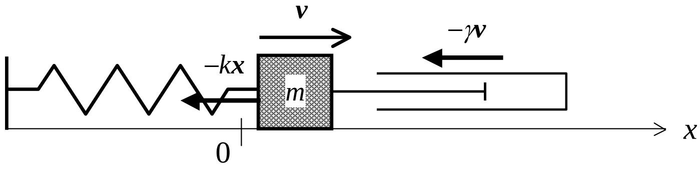
学籍番号 氏名 得点

Q1: 以下の空欄を埋めなさい(5×4=20).

抵抗のあるばねとおもりの系を周期的外力で駆動するとき，運動方程式は 2 階 ・ 非斉次 ・ 線形 微分方程式に分類される．解き方は，まず斉次(同次)形について 特性方程式 を立て，根を求めれば，根 λ_1 と λ_2 を使って x_1= $e^{\lambda_1 t}+e^{\lambda_2 t}$ と書ける．続いて，非斉次(非同次)形の特殊解 x_2 を一つ求め，x_1 と x_2 を加えたものが運動の一般解である．

Q2: ばね定数 k のばねに繋がれた質量 m のおもりに，速度に比例する抵抗力が働く運動を考える．バネの自然長からの伸びを x，粘性抵抗力を $-\gamma\dot{x}$（γ は正の比例定数)とする．



(1) 以降の計算を容易にするため，$2\kappa=\frac{\gamma}{m}$，$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ と置く．特性方程式を立て，根を求めよ(10).

特性方程式は $\lambda^2+2\kappa\lambda+\omega_0^2=0$ で，根の公式を使い $\lambda=-\kappa\pm\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}$.

(2) $\omega_0{}^2=\frac{3}{4}\kappa^2$ の場合の運動方程式の一般解を，κ を使い示しなさい．積分定数を C_1, C_2 とすること(10).

$\lambda_1=-\frac{\kappa}{2}$，$\lambda_2=-\frac{3\kappa}{2}$ だから，$x(t)=C_1e^{-\kappa t/2}+C_2e^{-3\kappa t/2}$.

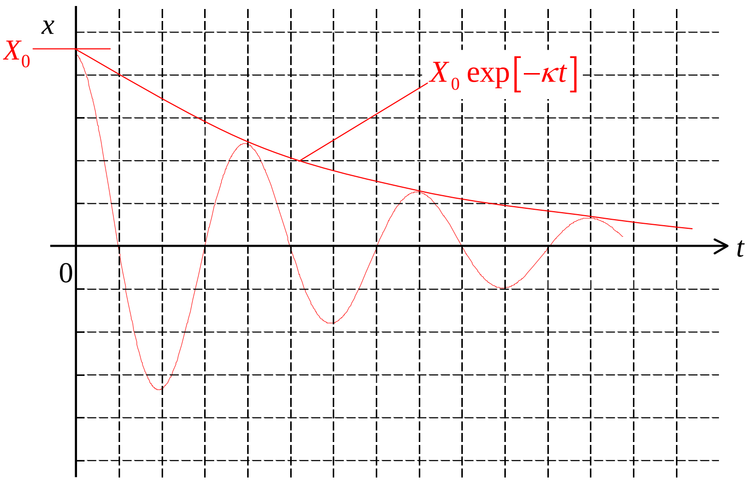
(3) $\kappa^2-\omega_0{}^2<0$ の場合，特性方程式の根は 2 つの共役複素数となる．いま，これを $\lambda_1=-\alpha+i\beta$，$\lambda_2=-\alpha-i\beta$ と置く．運動方程式の一般解を，指数関数を使って表わせ．積分定数を C_1, C_2 とすること(10).

$$
\begin{aligned}
x(t)&=C_1e^{-\alpha t+i\beta t}+C_2e^{-\alpha t-i\beta t}\\
&=e^{-\alpha t}\left(C_1e^{i\beta t}+C_2e^{-i\beta t}\right)
\end{aligned}
$$

(4) $x(t)$が実数であることから，C_1，C_2 は互いに共役複素数でなくてはならない．これを $C_1 = Re^{i\delta}$ ，$C_2 = Re^{-i\delta}$ と置く．オイラーの公式を用い，複素数を使わない形に解を書き換えよ (10).

(3)の解に $C_1 = Re^{i\delta}$ ，$C_2 = Re^{-i\delta}$ を代入して整理すると，$x = R\exp(-\alpha t + i\beta t + i\delta) + R\exp(-\alpha t - i\beta t - i\delta)$ となる．$Re^{-\alpha t}$ で括れば，$x = Re^{-\alpha t}\left\{\exp(i\beta t + i\delta) + \exp(-i\beta t - i\delta)\right\}$. オイラーの公式を使い，$x = 2Re^{-\alpha t}\cos(\beta t + \delta)$ を得る．

(5) ${\omega_0}^2 \gg \kappa^2$ なら系の運動は $x = X_0 e^{-\kappa t}\cos(\omega_0 t)$ (X_0 は任意の定数)で表される緩やかな減衰振動となる．運動のおよその形が分かるグラフを右に描きなさい(10).



およそ右図のとおり．正解のポイントは

(1) t=0 で x=X_0

(2) 周期が一定であること

満たされていない場合それぞれ 3 点減点．

Q3: Q2 の系を，周期的な外力 $F(t)$=$F_0\cos(\omega_0 t)$で駆動する．以降は，$2\kappa = \dfrac{\gamma}{m}$ ，$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ と置く．

(1) 運動方程式を示しなさい(10).

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$$

(2) 運動方程式の特殊解を求めよ(10).

解を $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ と仮定．運動方程式に代入すると

$2\kappa\omega_0 B = \dfrac{F_0}{m}$ ，$-2\kappa\omega_0 A = 0$ を得る．したがって，特殊解は $x = \dfrac{F_0}{2\kappa\omega_0 m}\sin(\omega_0 t)$

(3) $\kappa^2 > \omega_0^2$ のとき，充分な時間が経つと運動は単振動となる．振幅を求めよ(10).

特殊解の振幅が答．　$X = \dfrac{F_0}{2\kappa\omega_0 m}$