「力学演習」問題(10)　　2019.12.09

学籍番号　　　　　　　　氏名　　　　　　　　　　　　　　　得点

※重力加速度の大きさを g とする.

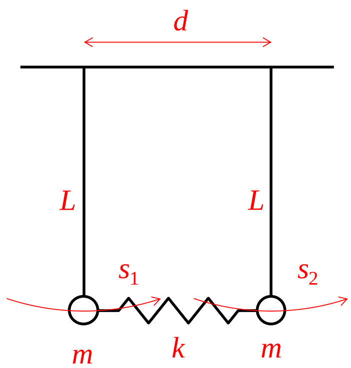
Q1: 以下の空欄を埋めなさい(5×8=40).

複数の質点からなる系を記述するのに必要な変数の数を系の____自由度____(A)と呼ぶ. n 個の(A)を持つ系には n 個の____基準振動____(B)が存在する. (B)とは，系の全ての質点が同じ振動数で振動し，かつすべての質点が同時に____平衡の位置____となるような振動である. 系のあらゆる振動は(B)の____重ね合わせ____で表せることが知られているため，(B)は系の振動を理解する重要な情報である.

例えば，変数 φ_1, φ_2 で記述できる振動運動を考える(教科書 p62). 運動方程式は φ_1, φ_2 それぞれについて書かれるが，$\ddot{\varphi}_1 =$ ____$-\omega^2\varphi_1 - \lambda(\varphi_1 - \varphi_2)$____, $\ddot{\varphi}_2 = -\omega^2\varphi_2 + \lambda(\varphi_1 - \varphi_2)$ と，一方の運動が他方に影響する形で見通しが悪い(記号は教科書を参照のこと). ここで新たな変数 $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ と $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ を用意すると，運動方程式は $\ddot{\varphi}_+ = -\omega^2\varphi_+$, $\ddot{\varphi}_- =$ ____$-(\omega^2 + 2\lambda)\varphi_-$____と書ける.

これらは「基準振動」と呼ばれる振動で，2 つのおもりが強調して振動する. ここで，φ_+とは，ばねが____自然長のままで変化しない____(文章)振動であり，簡単な考察から，角振動数は単一の振り子と同一の ω とわかる. 一方，φ_-は 2 つのおもりが____対称に振動する____(文章)振動で，重力にばねの復元力が加わるため角振動数が大きくなる.

Q2: 図のように，質量 m のおもりと長さ L のひもからなる振り子をばね定数 k のばねでつないだ. ばねの自然長は d である. 真下を基準に，軌道に沿ったおもりの変位を s_1, s_2 とする. 以下の問に答えよ.



(1) 左のおもりに働くばねの復元力を，s_1, s_2 を使い表わせ. おもりの振れ角は小さく，$(s_2 - s_1)$をばねの伸びと考えてよい(10).

答: $k(s_2 - s_1)$.

符号が合っているか吟味のこと. $s_2 - s_1 > 0$ のとき，力はばねにとっての引力，つまりプラス.

(2) 右のおもりに働くばねの復元力を，s_1, s_2 を使い表わせ. (1)と同様の考えを使うこと(10).

作用-反作用の法則から，力は左のおもりと大きさが同じで反対向き.

答: $-k(s_2 - s_1)$.

(3) おもりに働く重力の s 方向成分は，振り子の振幅が小さい時，それぞれ $-mg\dfrac{s_1}{L}$， $-mg\dfrac{s_2}{L}$ と書ける．

s_1，s_2 が従う運動方程式をそれぞれ示せ(10×2=20).

素直に，おもりの反発力を重力の反発力を足す.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s_1}{\mathrm{d}t^2} = -mg\frac{s_1}{L} + k\left(s_2 - s_1\right) \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 s_2}{\mathrm{d}t^2} = -mg\frac{s_2}{L} - k\left(s_2 - s_1\right)$$

(4) $s_1 + s_2$ を s_+，$s_1 - s_2$ を s_-とする．すると，s_+，s_-はそれぞれ基準振動の条件を満たす．すなわち，$\ddot{s}_+ = -(\text{定数})s_+$ の形に書ける．これを示し，基準角振動数を求めなさい(5×2=10).

$$\ddot{s}_+ = -g\frac{s_1}{L} + \frac{k}{m}\left(s_2 - s_1\right) - g\frac{s_2}{L} - \frac{k}{m}\left(s_2 - s_1\right) = -\frac{g}{L}\left(s_1 + s_2\right) = -\frac{g}{L}s_+$$

$$\therefore \omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

(5) s_-について，同様の計算を行いなさい(5×2=10).

$$\ddot{s}_- = -g\frac{s_1}{L} + \frac{k}{m}\left(s_2 - s_1\right) + g\frac{s_2}{L} + \frac{k}{m}\left(s_2 - s_1\right) = -\frac{g}{L}\left(s_1 - s_2\right) - \frac{2k}{m}\left(s_1 - s_2\right) = -\left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right)s_-$$

$$\therefore \omega_- = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}$$