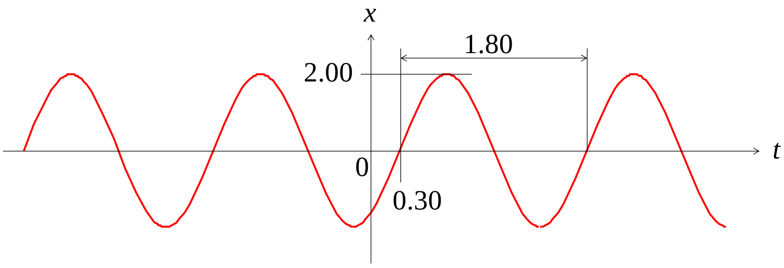
「力学演習」問題(08)　　2017.11.23

学籍番号　　　　氏名　　　　　　　　得点

Q1: 以下の空欄を埋めなさい(5×4=20).

質点に働く力が原点からの＿変位＿に比例し，かつ＿原点＿の方向を向くとき，質点は「単振動」を行う．運動方程式は，変位を x，定数を ω^2 として＿$\ddot{x}=-\omega^2 x$＿(数式)と書ける．運動方程式は 2 階の微分方程式だが，一般解は＿$x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$＿($A$，$B$ は任意定数)と書けるので，これは暗記すること．

Q2:下図の様に表される単振動を数式で表せ．円周率は 3.14 として，小数点以下 2 桁で解答せよ(10).



正解の一つは $x(t)=2.00\sin(3.49t-1.05)$．

最大の変位は 2.00，変位が最大になったときの時刻は 0.30 s で，周期は 1.80 s であることがわかる．ここから $\omega=\dfrac{2\pi}{1.80}$ が得られ，sin を選べば初期位相は周期の $\dfrac{1}{6}$ だから $-\dfrac{\pi}{3}$=−1.05．−cos を選べば初期位相は周期の $\dfrac{1}{12}$ だから $\dfrac{\pi}{6}$=0.52．他に考えられる正解は

$x(t)=-2.00\sin(3.49t+2.09)$，　$x(t)=-2.00\cos(3.49t+0.52)$，　$x(t)=2.00\cos(3.49t-2.62)$．

Q3: 運動方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$ について，以下の問に答えよ．

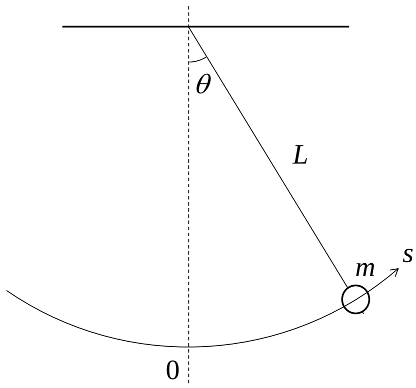
(1) 初期条件は，時刻ゼロにおいて位置が x_0，速度が v_0 であった．運動を決定せよ(10).

$x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$．計算はしない．覚えること．解に初期条件を代入，$x_0=A$，$v_0=\omega B$ と決定できるから，運動は $x=x_0\cos(\omega t)+\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$．

(2) 運動の振幅を求めよ(10).

振幅は $\sqrt{A^2+B^2}$ で与えられるから，$\sqrt{{x_0}^2+\left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}$．

Q4: おもりの質量が m，長さ L の振り子について考える．



(1) 独立変数を，おもりの位置を鉛直から軌道にそって測った距離 s とする．s に関する運動方程式を立てなさい(10)．**ヒント**：運動は s 方向に限定されているので，$m\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=$(力の s 方向成分)

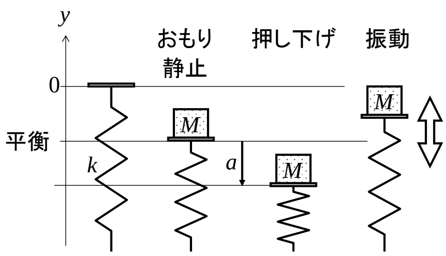
$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\theta$$

(2) t=0 でおもりを $s=s_0$ から静かに放したとして，$s(t)$を決定せよ．ただし，$\sin\theta\approx\theta$ の近似を採用する(10)．

運動方程式は $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-g\theta=-\dfrac{s}{L}g$ で，これは単振動である．解は $\theta=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ (ただし $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{L}}$，$A$，$B$ は任意定数)．t=0 で $s=s_0$，v=0 という初期条件を代入すれば運動が決定できて，

$$s=s_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).$$

Q5: 図のように，鉛直方向に伸縮できるばね定数 k のばねに軽い皿を取り付け，質量 M のおもりを載せた．ばねが自然長の位置を y=0 として、上向きに y 軸を取る．おもりを a $(a>0)$だけ押し下げ，$t=0$ で手を放す．重力加速度の大きさを g とする．



(1) おもりの高さ y が従う運動方程式を示せ(10)．

$$M\ddot{y}=-ky-Mg$$

(2) 運動を決定せよ(10)．

(1)の一般解は $y(t)=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}t\right)-\dfrac{Mg}{k}$．初期条件は t=0 で $y=-\dfrac{Mg}{k}-a$，$\dot{y}=0$ だから，代入すると $A=-a$，=0 を得る．　答：$y(t)=-a\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}t\right)-\dfrac{Mg}{k}$

(3) 運動が成立する a の範囲を答えよ(10)．

y>0 になると，おもりが皿から浮き上がる．これを避ける条件が $a<\dfrac{Mg}{k}$．題意から a<0 もないので，答は $0\le a\le\dfrac{Mg}{k}$．