

学籍番号 _____ 氏名 _____ 得点 _____

重力加速度の大きさを g とする。

Q1: 流体から受ける抵抗は速度に比例する「粘性抵抗」と速度の 2 乗に比例する「慣性抵抗」の和である。断面が半径 r の円形の物体が粘性率 η の流体から受ける粘性抵抗力は $6\pi\eta r v$ 、慣性抵抗は比例定数を c とし cr^2v^2 と書ける。SI 単位系における c の単位を SI 基本単位([kg][m][s]) を使い表わせ(10)。

$[N]=[c][m]^2[m/s]^2$. $[N]=[kg][m]/[s]^2$ だから、 c の単位は kg/m^3 .

Q2: 典型的には c の大きさを 1.0(SI 単位)としてよい。粘性抵抗 \gg 慣性抵抗の領域を「粘性領域」、その反対を「慣性領域」と呼ぶ。空気の粘性率を $1.8 \times 10^{-5} \text{Ns/m}^2$ とする。

(1) 空気中を落下する $r = 1.0 \text{ mm}$ の雨粒が粘性領域にある最大の速度を求めよ。ここで粘性領域が成り立つ条件を $[粘性抵抗]/[慣性抵抗] > 10$ とする(10)。

条件は $\frac{6\pi\eta}{rv} > 10$. 変形して、 $v < \frac{6\pi\eta}{10r} = 3.4 \times 10^{-2} \text{m/s}$. 雨粒は落下に伴い粘性領域から慣性領域に移行する。

Q3: 速度に比例する抵抗を受けながら運動する物体の運動を解析する。鉛直上向きに y 軸を取り、抵抗は以下の式で表されるとする。

$$R = -\gamma v$$

R : 抵抗力 γ : 抵抗係数 v : 物体の速度

(1) v に関する運動方程式(1 階の微分方程式)を立てなさい(10)。

$$m\dot{v} = -mg - \gamma v .$$

(2) 運動方程式を解きなさい。積分定数を C とせよ(10)。

同次形の一般解は $v(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}$. 特解は $v(t) = -\frac{mg}{\gamma}$. 足して、一般解は $v(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}$. (C は積分定数)。

変数分離法で解いてもよい。教科書 p26 参照。

(3) $t=0$ で物体を静かに離れた。 $v(t)$ を定めよ(10)。

$$v(0) = C - \frac{mg}{\gamma} = 0 \text{ から } C = \frac{mg}{\gamma} . \quad \rightarrow \quad v(t) = \frac{mg}{\gamma} \left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1 \right)$$

- (4) 物体の速度はやがて終端速度で一定となる. 速度が一定になるまでに掛かる時間は時定数の何倍か. ここで, 「一定になった」と言う判断を終端速度の 99%とする(10).

$$\frac{v}{v_t} = \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) = 0.99 \text{ から } e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.01. \text{ 両辺の対数を取り, } t \text{ について解けば } t = \ln(0.01)\tau = 4.61\tau.$$

Q4: パラシュートの落下は慣性領域の近似がよく成り立ち, 運動方程式は上向きを正として

$$m\dot{v} = -mg + \beta S \frac{1}{2} \rho v^2$$

β : 空気抵抗係数 S : パラシュートの断面積 ρ : 空気の密度

である.

- (1) 終端速度を求めよ.

$$mg = \beta S \frac{1}{2} \rho v^2 \text{ を変形し, } v = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho\beta S}}. \text{ 符号は問わない.}$$

- (2) 多くの物体で $\beta=1$ が良い近似である. スカイダイバーの体重を 60kg, 重力加速度の大きさを 9.8m/s², 空気の密度を 1.3kg/m³として, 終端速度が 2.0m/s となるパラシュートの直径を求めよ(10).

$$v = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho\beta S}} \text{ を } S \text{ について解き, } S = \frac{2mg}{\rho\beta v^2}. \text{ 値を代入し,}$$

$$S = 226\text{m}^2. S = \pi D^2/4 \text{ から } D = 17\text{m} \text{ である.}$$

- (3) パラシュートは, 時刻 0, 速度 $-v_0$ で開き, 終端速度 $-v_t$ までスカイダイバーを減速させる. 時刻と速度の関係を右のグラフに示す. 時刻 0 の加速度は $+g$ であった. 重力加速度の大きさを g , ダイバーの質量を m として, ダイバーの加速度 a , ダイバーに働くの紐の張力 T をそれぞれグラフに書き込みなさい. 速度のグラフと同様, 左端に物理量を記入せよ(10×2=20).

加速度は常に正. $+g$ から徐々に減少, ゼロになる. 張力は $2mg$ でスタート, 終端速度のときに重力と釣り合い mg となる.

