学籍番号　　氏名　　得点

重力加速度の大きさを g とする.

Q1:物体が流体から受ける抵抗は「粘性抵抗」と「慣性抵抗」の和である.

(1) 半径 r の球形の物体が粘性率 η の流体から受ける粘性抵抗力は $6\pi\eta rv$，慣性抵抗は比例定数を c として cr^2v^2 と書ける. SI 単位系における η と c の単位を SI 基本単位([kg][m][s])を使い表わせ(5×2=10).

[N]=[η][m][m/s]． [N]=[kg][m]/[s]^2 だから，η の単位は kg/ms．(正式には Pa·s を使う)

[N]=[c][m]^2[m/s]^2． [N]=[kg][m]/[s]^2 だから，c の単位は kg/m^3.

(2) 典型的には c の大きさを 1.0(SI 単位)としてよい．粘性抵抗>>慣性抵抗の領域を「粘性領域」，その反対を「慣性領域」と呼ぶ．空気の粘性率を 1.8×10^{-5} Ns/m^2 とする．空気中を落下する $r=1.0$ mm の雨粒が粘性領域にある最大の速さを求めよ．粘性領域が成り立つ条件を[粘性抵抗]/[慣性抵抗] > 10 とする(10).

条件は $\dfrac{6\pi\eta}{rv}>10$．変形して， $v<\dfrac{6\pi\eta}{10r}=3.4\times10^{-2}\mathrm{m/s}$．雨粒は落下に伴い粘性領域から慣性領域に移行する.

(3) その後，雨滴は慣性領域に移行して，終端速度に達する．$r=1.0$ mm の雨粒の終端速度を求めよ．ただし，c=1.0(SI 単位)と仮定する(10).

半径 1mm の雨粒の質量はおよそ 4.2×10^{-6} kg である．終端速度のとき， $mg=cr^2v^2$ が成立．変形して $v=\sqrt{\dfrac{mg}{cr^2}}$．計算すれば 6.4m/s である.

Q2: $y=f(x)$があり， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=b$ (a，b は定数)の関係がある．この関数は(0，0)を通る．y を求めよ(10).

斉次形の特性方程式 $\lambda+a=0$ から $\lambda=-a$，解は $y=Ce^{-ax}$ (C は定数).

非斉次形の特解は $y=\dfrac{b}{a}$ である．これを足し， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=b$ の一般解は $y=Ce^{-ax}+\dfrac{b}{a}$ (C は定数).

初期条件，x=0 のとき y=0 を代入， $C=-\dfrac{b}{a}$ と決定される．したがって，

$y=\dfrac{b}{a}\left(1-Ce^{-ax}\right)$.

Q3: 速度に比例する抵抗を受けながら運動する質量 m の物体の運動を解析する．鉛直上向きに y 軸を取り，抵抗は以下の式で表されるとする．

$R = -\gamma v$　　R：抵抗力　　γ：抵抗係数　　v：物体の速度

(1) v に関する運動方程式(1 階の微分方程式)を立てなさい(10).

$m\dot{v} = -mg - \gamma v$.

(2) 運動方程式を解きなさい．積分定数を C とせよ(10).

斉次形の一般解は $v(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}$ ．特解は $v(t) = -\frac{mg}{\gamma}$ ．足して，一般解は

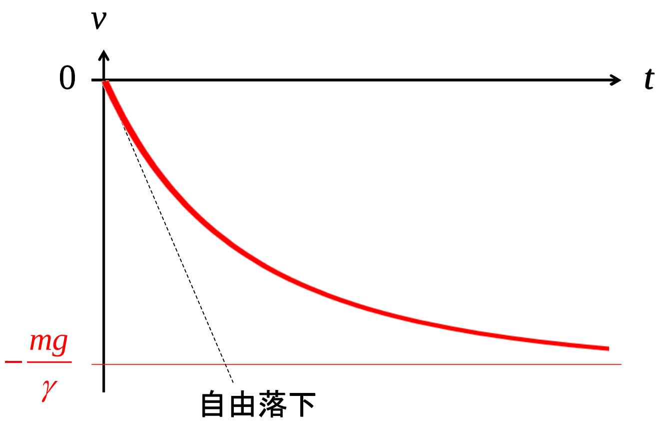
$v(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}$.　(C は積分定数)．変数分離法で解いてもよい．教科書 p26 参照.

(3) t=0 で物体を静かに離した．$v(t)$を定めよ(10).

$v(0) = C - \frac{mg}{\gamma} = 0$から$C = \frac{mg}{\gamma}$.　→　$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right)$

(4) v の時間変化をグラフに表しなさい．点線は抵抗のない自由落下を表す(10).

始め，グラフが自由落下の線に沿っていること．また，ある水平線(終端速度)に全金していることが満たされれば正解.



(5) 終端速度を求め，グラフに記入せよ(10).

終端速度の大きさは $-\frac{mg}{\gamma}$. これを水平線とともに描けば正解.

(6) m/γ は時間の次元を持ち，これを「時定数」と呼ぶ．時定数の 3 倍の時間が過ぎたとき，物体の速度は終端速度の何%か．有効数字 2 桁で解答せよ(10).

問題が何を問うているかというと，$\frac{v}{v_t} = -\left(e^{-3} - 1\right) = 0.9502...$ ということ．答えは 95%.