学籍番号　氏名　得点

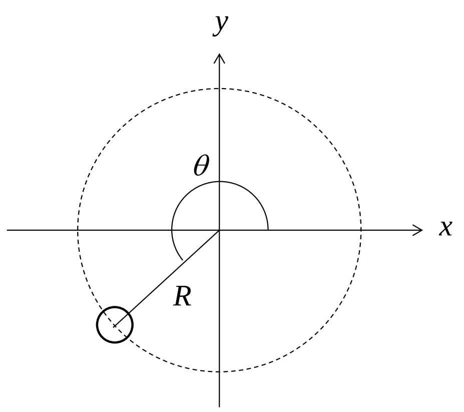
Q1: 三次元極座標で(r, θ, φ)と表される点 P がある．P の座標をデカルト座標系で表したとき，それぞれの座標を r, θ, φで表しなさい(5×3).

$x = r\sin\theta\cos\varphi$　　$y= r\sin\theta\sin\varphi$　　$z = r\cos\theta$

Q2: 三次元デカルト座標で(x, y, z)と表される点 P がある．P の座標を極座標で表したとき，それぞれの座標を x, y, z で表しなさい(5×3).

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$　　$\theta = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ または $\cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　　$\varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

Q3. 図のように，半径 R の円軌道を運動する質点がある．θの時間変化は$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + \beta t^2$である．



(1) 質点の座標 $\boldsymbol{r}$ を t の関数で表し，デカルト座標で成分表示せよ(10).

$$\boldsymbol{r} = R\left[\cos\left(\theta_0+\omega t+\beta t^2\right), \sin\left(\theta_0+\omega t+\beta t^2\right)\right]$$

(2) 質点の速度 $\boldsymbol{v}$ を t の関数で表し，デカルト座標で成分表示せよ(10).

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$
$$= R(\omega+2\beta t)\left[-\sin\left(\theta_0+\omega t+\beta t^2\right), \cos\left(\theta_0+\omega t+\beta t^2\right)\right]$$

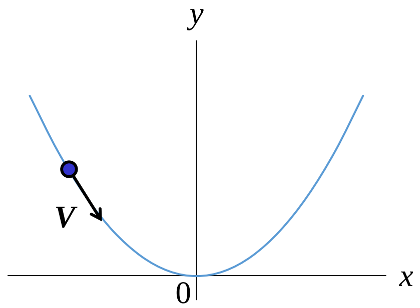
(3) 質点の速度ベクトルと位置ベクトルの内積を求めよ(10).

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = R\begin{pmatrix}\cos\left(\theta_0+\omega t+\beta t^2\right)\\ \sin\left(\theta_0+\omega t+\beta t^2\right)\end{pmatrix}\cdot R(\omega+2\beta t)\begin{pmatrix}-\sin\left(\theta_0+\omega t+\beta t^2\right)\\ \cos\left(\theta_0+\omega t+\beta t^2\right)\end{pmatrix} = 0$$

円運動は，速度ベクトルが常に位置ベクトルに直交する．

Q4: $y = x^2$ で表される曲線の上を一定の速さ V で動く物体がある．

(1) 物体が原点を通過する瞬間の v_x を求めよ(10).



$v_x^2 + v_y^2 = V^2$．原点上は v_y=0 だから，v_x=V.

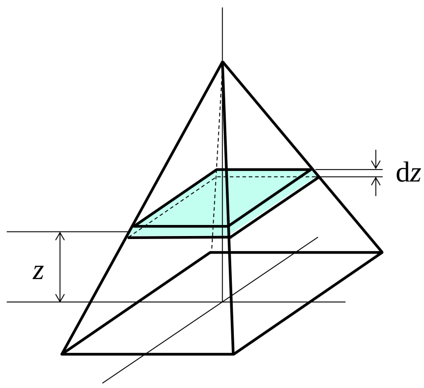
(2) v_x を x の関数で表わせ(10).

$v_x^2 + v_y^2 = V^2$． $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = V^2 \rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{V^2}{1+4x^2}$

$\therefore v_x = \frac{V}{\sqrt{1+4x^2}}$．原点で v_x=V であること，x 座標が大きくなるにつれ v_x が小さくなっていくこと，v_x が y 軸に対して対称であることなどがチェックポイント．

Q5. 底面が一辺 a の正方形，高さ h の四角錐がある．以下の問いに答えよ．

(1) 四角錐の体積は，体積を正方形の薄板に分割し，積分することで得られる．図に示された薄板の体積 dV を答えよ(10).



$$\mathrm{d}V = \left(\frac{h-z}{h}a\right)^2 \mathrm{d}z$$

※次元が必ず「長さ」^{3}になっていることを確認すること．

(2) (1)の解を定積分して，四角錐の体積を求めよ(10).

$$V = \int_0^h \left(\frac{h-z}{h}a\right)^2 \mathrm{d}z = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^h (h-z)^2\, \mathrm{d}z$$
$$= \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[-\frac{1}{3}(h-z)^3\right]_0^h = \frac{a^2 h}{3}$$