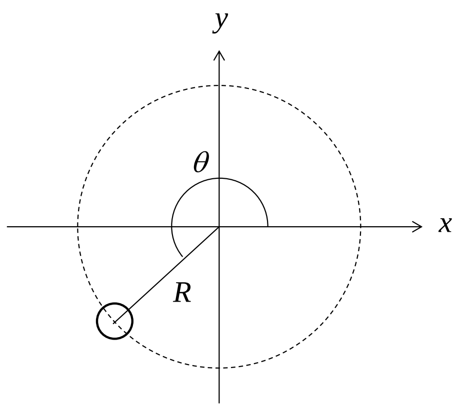
学籍番号 氏名 得点

Q1: 3 次元極座標で$\left(2,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$と表される点 P がある．P 点をデカルト座標系で成分表示せよ(10).

$x = r\sin\theta\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$， $y = r\sin\theta\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$， $z = r\cos\theta = \sqrt{2}$

解答：$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}},\sqrt{2}\right)$

Q2. 図のように，半径 R の円軌道を運動する質点がある．θの時間変化は$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + \beta t^2$である．



(1) 質点の座標 $\boldsymbol{r}$ を t の関数で表し，デカルト座標で成分表示せよ(10).

$\boldsymbol{r} = R\left[\cos\left(\theta_0 + \omega t + \beta t^2\right),\sin\left(\theta_0 + \omega t + \beta t^2\right)\right]$

(2) 質点の速度 $\boldsymbol{v}$ を t の関数で表し，デカルト座標で成分表示せよ(20).

$\dot{\boldsymbol{r}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = R(\omega + 2\beta t)\left[-\sin\left(\theta_0 + \omega t + \beta t^2\right),\cos\left(\theta_0 + \omega t + \beta t^2\right)\right]$

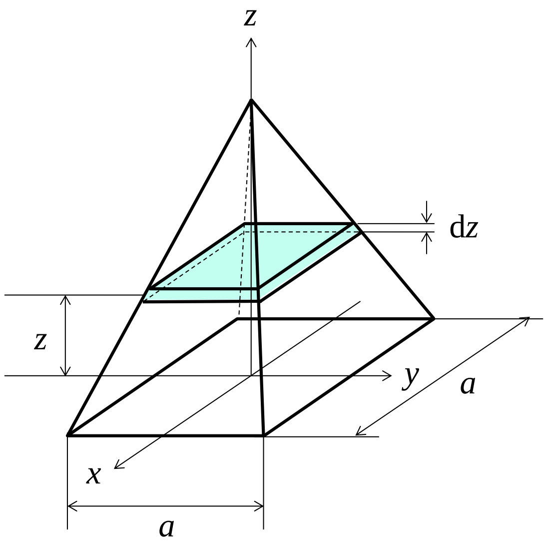
(3) 質点の速度ベクトルと位置ベクトルの内積を求めよ(20).

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = R\begin{pmatrix}\cos\left(\theta_0 + \omega t + \beta t^2\right)\\ \sin\left(\theta_0 + \omega t + \beta t^2\right)\end{pmatrix}\cdot R(\omega + 2\beta t)\begin{pmatrix}-\sin\left(\theta_0 + \omega t + \beta t^2\right)\\ \cos\left(\theta_0 + \omega t + \beta t^2\right)\end{pmatrix} = 0$$

円運動は，速度ベクトルが常に位置ベクトルに直交する．

(4)おまけ：質点の加速度を求め，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ を使い表わせ．時間が余って暇な人のみ，裏面に解答のこと．

Q3. 図のような，底面が一辺 a の正方形，高さ h の四角錐がある．以下の問いに答えよ．



(1) 四角錐の体積は，体積を正方形の薄板に分割し，積分することで得られる．図に示された薄板の体積 dV を答えよ(20).

$$\mathrm{d}V = \left(\frac{h-z}{h}a\right)^2 \mathrm{dz}$$

※次元が必ず「長さ」^{3}になっていることを確認すること．

(2) (1)の解を定積分して，四角錐の体積を求めよ(20).

$$V = \int_0^h \left(\frac{h-z}{h}a\right)^2 \mathrm{dz} = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^h (h-z)^2 \mathrm{dz} = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[-\frac{1}{3}(h-z)^3\right]_0^h = \frac{a^2 h}{3}$$

(3) おまけ：底面がどんな形でも，錐形の体積が $\dfrac{Sh}{3}$ (S は底面積，h は高さ)であることを示しなさい．時間が余って暇な人のみ，裏面に解答のこと．